Lista 0. Operacja sumowania Σ i dwumian Newtona.

1. Zapisać przy pomocy operacji $\sum\limits_{n=...}^{...}...$ sumy

   (a) $4+7+10+13+16+...+40$,

   (b) $\dfrac{2^2+2+1}{\ln 2}+\dfrac{3^2+3+1}{\ln 3}+\dfrac{4^2+4+1}{\ln 4}+...+\dfrac{70^2+70+1}{\ln 70}$,

   (c) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+...+\dfrac{1}{111}$,

   (d) $1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{20}$,

   (e) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^5}-\dfrac{1}{2^6}+...$,

   tak, by pierwszym indeksem sumowania było

   - $n=1$,
   - $n=0$,
   - $n=4$.

2. Zapisać poniższe sumy przy pomocy pojedynczego znaku Σ (czyli w postaci $\sum\limits_{n=...}^{...}...$), maksymalnie upraszczając sumowany ciąg.

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{15}(k+3)^2-3\sum\limits_{k=1}^{15}(2k+3)$,

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{9}2^n+\sum\limits_{n=1}^{10}2^n$,

   (c) $30+x^2\sum\limits_{k=1}^{10}x^k$,

   (d) $x\sum\limits_{n=0}^{10}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum\limits_{n=1}^{11}(-1)^n\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x\neq 0$.

3. Korzystając z dwumianu Newtona rozwinąć i maksymalnie uprościć poniższe wyrażenia.

   (a) $(2x+3)^4$,

   (b) $\left(3x-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$,

   (c) $\left(\sqrt{y}+\dfrac{2}{y}\right)^6$,

   (d) $(a-1)^8$.

4. W rozwinięciu Newtona $\left(x^4 - \frac{2}{x}\right)^{135}$ znaleźć

   (a) współczynnik przy x^{15},

   (b) współczynnik przy $\frac{1}{x^{10}}$,

   (c) wyraz stały (niezależny od x).

5. W rozwinięciu Newtona $(1+4x)^n$, $n \in \mathbf{N}$, współczynnik przy x^2 wynosi 336. Znaleźć n.

6. W rozwinięciu Newtona $(1+ax)^n$, $n \in \mathbf{N}$, trzy pierwsze składniki to 1, $24x$ i $252x^2$. Znaleźć a i n.

7. Znaleźć przybliżoną wartość potęgi 1.03^{38} biorąc sumę czterech pierwszych składników rozwinięcia $(1+0.03)^{38}$ (pierwszy to ten z najniższą potęgą 0.03). Obliczyć, w procentach, błąd względny takiego przybliżenia.

8. Korzystając z rozwinięcia Newtona dla $(1+x)^n$ uzasadnić, że dla wszystkich n naturalnych dodatnich

   (a) $8^n + 6$ jest podzielne przez 7,

   (b) $4^n + 2$ jest podzielne przez 6,

   (c) $6^n + 3 \cdot 11^n + 1$ jest podzielne przez 5,

   (d) $4^n + 6n - 1$ jest podzielne przez 9,

   (e) $5^n + 12n + 15$ jest podzielne przez 16,

   (f) $3^n - 2n^2 + 7$ jest podzielne przez 8.

9. (*) Podać przykład wielomianu W takiego, że dla wszystkich n naturalnych dodatnich wyrażenie $14^n + W(n)$ jest podzielne przez

   (a) 13,

   (b) 169,

   (c) 2197.

10. Dla $n \in \mathbf{N}_+$ definiujemy podwójną silnię jako
    $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n-1)$,
    $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot (2n)$.

    (a) Pokazać, że $(2n-1)!! \cdot (2n)!! = (2n)!$ oraz $(2n)!! = n! \cdot 2^n$.

    (b) Uprościć wyrażenia $\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!}$, $\frac{(2n)!!}{(2n+2)!!}$ oraz $\frac{(2n-1)!!}{(2n+3)!!}$.

11. Dla $x \in \mathbf{R}$ i $k \in \mathbf{N}$ definiujemy uogólniony współczynnik Newtona jako
    $\binom{x}{0} = 1$ oraz $\binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-(k-1))}{k!}$, $k > 0$.

    (a) Pokazać, że dla $x = n \in \mathbf{N}$, $n \geq k$, definicja ta jest rozszerzeniem definicji standardowego symbolu Newtona, tzn. zgadza się z podstawową definicją symbolu $\binom{n}{k}$.

(b) Dla ustalonego k wyznaczyć wszystkie x dla których $\binom{x}{k} = 0$.

(c) Korzystając z poprzednich wyników udowodnić, że znana równość

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \cdots, \ x \in (-1,1), \ p \in \mathbf{R},$$

dla $p = n \in \mathbf{N}$ jest zwykłym dwumianem Newtona.

(d) Obliczyć $\binom{-1}{k}$, maksymalnie upraszczając wynik.

(e) Dla $x > 0$ i $k > 0$ pokazać, że $\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$.

(f) Wykazać, że $\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}$, $k \geq 2$,

a następnie wyprowadzić podobny wzór dla $\binom{-\frac{1}{2}}{k}$.

12. Ciąg Fibonacciego $f_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$ powstaje wg znanej reguły - dwa pierwsze elementy ciągu są równe 1, a każdy następny jest sumą dwóch poprzednich. Ciąg ten ma wzór ogólny, który może się wydawać dziwny i nie widać od razu, że jego elementami są liczby naturalne:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Zapisać poniższy wzór przy pomocy pojedynczej operacji Σ tak, by sumowane wyrażenie zawierało jedynie liczby wymierne (w szczególności nie może pojawić się w nim $\sqrt{5}$).

Krzysztof „El Profe” Michalik