Lista 1. Liczby zespolone.

1. Poniższe liczby zespolone zapisać w postaci algebraicznej.

   (a) $\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$.

   (b) $(2-i)^3+(2+i)^3$.

   (c) i^n, $n \in \mathbf{N}$.

   (d) $3i+(3i)^2+(3i)^3+...+(3i)^{51}$.

   (e) $Re(1-5i)^4+Im\left(\dfrac{i}{1+i}\right)$.

2. Obliczyć moduły poniższych liczb.

   (a) $-5+12i$

   (b) $\dfrac{1-2i}{3+i}$

   (c) $(3+i)^{110}$

   (d) $z+1-3i$, gdzie $z=x+yi$, $x,y \in \mathbf{R}$

3. Udowodnić, że poniższe wzory są prawdziwe dla dowolnych liczb zespolonych z i w.

   (a) $Re(z+w)=Re(z)+Re(w)$, $Re(z-w)=Re(z)-Re(w)$, $Im(z+w)=Im(z)+Im(w)$ oraz $Im(z-w)=Im(z)-Im(w)$.

   (b) $z+\overline{z}=2Re(z)$, $z-\overline{z}=2iIm(z)$ oraz $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

   (c) Jeśli $z\in\mathbf{R}$ to $Re(z\cdot w)=z\cdot Re(w)$ oraz $Im(z\cdot w)=z\cdot Im(w)$.

   (d) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$, $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$, a ponadto jeżeli $w\neq 0$ to $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
   Wywnioskować stąd, że dla $n\in\mathbf{N}_+$ mamy $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$.

   (e) $-|z|\leq Re(z)\leq |z|$, $-|z|\leq Im(z)\leq |z|$ oraz $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}=\pm|z|$.

   (f) $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$, a ponadto jeżeli $w\neq 0$ to $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$.
   Wywnioskować stąd, że dla $n\in\mathbf{N}_+$ mamy $|z^n|=|z|^n$.

   (g) $|z+w|^2=|z|^2+|w|^2+2Re(z\cdot\overline{w})$.

   (h) $|z+w|\leq|z|+|w|$.

   (i) $|z+w|=|z|+|w|\Leftrightarrow z=0\vee w=0\vee\dfrac{z}{w}>0$.

4. Rozwiązać poniższe równania i nierówności. W przypadku nieskończonej ilości rozwiązań zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej.

   (a) $\overline{z}+2-i=(3+2i)z$.

   (b) $Re(2iz)=4Im((1-i)\overline{z})$.

   (c) $Re(z^2)\leq 0$.

   (d) $Im(z^3)=0$.

(e) $Re\left(\frac{2}{z}\right) = 0.$

(f) $Im\left(\frac{2}{z}\right) = 1.$

(g) $Im\left(\frac{1+2i}{z+1}\right) \geq 0.$

(h) $|z + 5 - 3i| = 2.$

(i) $|iz + 3 + 2i| > 1.$

(j) $|z + 1 - i| = |z + 4|.$

(k) $|i\overline{z} - 2 + 3i| \leq |z - 3|.$

(l) $|z^2 - 4| < 5|z + 2|.$

(m) $3|z - 2i| < |z^2 + 4| \leq 2|z + 2i|.$

(n) $2|z + 3| = |z + 6i|.$

(o) $2|z + 1| \leq |\overline{z} + 10 + 12i|.$

5. (*)

   (a) Niech z_1, z_2 będą dwiema różnymi liczbami zespolonymi oraz niech $c > 0$, $c \neq 1$. Wykazać, że zbiór wszystkich $z \in \mathbf{C}$ dla których $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = c$ jest okręgiem. W geometrii taki okrąg nazywany jest okręgiem Apoloniusza.

   (b) Jaką krzywą otrzymamy dla $c = 1$?

6. Zapisać poniższe liczby w postaci trygonometrycznej oraz wykładniczej.

   (a) $3 + 3i$

   (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

   (c) $-1 - i\sqrt{3}$

   (d) $\sqrt{5} - i\sqrt{5}$

   (e) $z \in \mathbf{R}$, $z \notin 0$

   (f) $z = yi$, $y \in \mathbf{R}$, $y \notin 0$

7. Znaleźć postać algebraiczną oraz trygonometryczną/wykładniczą poniższych liczb.

   (a) $(1 - i)^{23}.$

   (b) $-(-1 + i\sqrt{3})^{-14}.$

   (c) $\frac{(1 + i)^{39}}{1 - i\sqrt{3}}.$

   (d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{33} \cdot (\sqrt{3} - i)^7.$

8. Używając podstawowej wersji twierdzenia de Moivre's udowodnić jego równoważną wersję: dla $z \in \mathbf{C}$ i $n \in \mathbf{Z}$ mamy $(\ |z|(\cos\alpha - i\sin\alpha)\ )^n = |z|^n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha).$

9. Niech $z = x + yi$ i $z_0 = x_0 + y_0 i$, $x, y, x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

   (a) Dla $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, znaleźć równanie półprostej $arg(z - z_0) = \alpha$. Wynik zapisać w postaci funkcji $y = f(x)$, $x \in S$, gdzie S jest zbiorem, który trzeba wyznaczyć.

   (b) Jaką półprostą dostaniemy dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a jaką dla $\alpha = \frac{3\pi}{2}$?

10. (kontynuacja zadania 4). Rozwiązać poniższe równania i nierówności. W przypadku nieskończonej ilości rozwiązań zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej.

   (a) $Re\left(z(1 + i\sqrt{3})^8\right) = 128$.

   (b) $Im\left((\overline{z} + 1)(-\sqrt{3} + i)^9\right) < 256$.

   (c) $\left| z\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{15} + 2\right| \leq 5$.

   (d) $arg(z + 2 - 3i) = \frac{\pi}{4}$.

   (e) $\frac{\pi}{3} < arg(z - 2i) \leq \frac{5\pi}{6}$.

   (f) $arg(iz) = \frac{\pi}{3}$.

   (g) $\frac{\pi}{4} \leq arg\left((1 + i)(z + 2)\right) \leq \frac{5\pi}{4}$.

   (h) $arg\left(\frac{-1 + i}{z}\right) = \frac{\pi}{4}$.

   (i) $arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$.

   (j) $arg(-2iz^4) = \pi$.

   (k) $\frac{\pi}{2} \leq arg(z^4) \leq \frac{3\pi}{4}$.

   (l) $\begin{cases} |z - 3i| = 1, \\ arg(z) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

   (m) $\begin{cases} |z - 1| = 3, \\ arg(z + i) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

   (n) $\begin{cases} |z + 1| = 5, \\ arg(z + 3 - 3i) = \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

   (o) $\begin{cases} arg(z + 7) = \frac{3\pi}{2}, \\ arg(z + 5 - i) = \frac{4\pi}{3}. \end{cases}$

   (p) $\begin{cases} arg(z - 2i) = \frac{\pi}{6}, \\ arg(z - 1 - 3i) = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

11. Stosując postać trygonometryczną lub wykładniczą liczby zespolonej rozwiązać poniższe równania.

(a) $z^4 = |z|$.

(b) $(\sqrt{3}+i)(\overline{z})^3 = z$.

(c) $|z|^5 = iz^5$.

12. (*) Załóżmy, że $z, w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $z + w \neq 0$ oraz $|z| = |w|$.

(a) Uzasadnić, że zawsze można znaleźć taki argument α liczby z oraz taki argument β liczby w, że $|\alpha - \beta| < \pi$ (niekoniecznie są to argumenty główne).

(b) Udowodnić dowolną metodą, że dla takich α i β kąt $\varphi = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ jest jednym z argumentów liczby $z + w$.

13. Korzystając z poprzedniego zadania wyznaczyć postać trygonometryczną/wykładniczą poniższych liczb.

(a) $-\sqrt{2}+1+i$.

(b) $1+i(\sqrt{3}+2)$.

(c) $1+i(\sqrt{3}-2)$.

(d) $1+i(2-\sqrt{3})$.

(e) $\sqrt{2}+1+i(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

(f) $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\left(\sin\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$.

(g) $\cos\dfrac{\pi}{9}-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\left(\sin\dfrac{\pi}{9}-i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$.

14. Obliczyć pierwiastki poniższych liczb zespolonych. Wynik podać w postaci postać algebraicznej oraz trygonometrycznej.

(a) $\sqrt{-3+4i}$

(b) $\sqrt{7+i}$

(c) $\sqrt[3]{8i}$

(d) $\sqrt[3]{-27}$

(e) $\sqrt[4]{-1}$

(f) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$

(g) $\sqrt[5]{1}$

(h) $\sqrt[4]{i}$

(i) $\sqrt[3]{1+i}$

(j) $\sqrt[4]{(1+2i)^4}$

(k) $\sqrt[3]{(1+2i)^6}$

(l) $\sqrt[n]{z^n}$, $z \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}_+$

15. (*) Korzystając bezpośrednio z definicji pierwiastka kwadratowego z liczby zespolonej z wykazać, że

(a) gdy $z < 0$ to $\sqrt{z} = \pm i\sqrt{|z|} = \pm i\sqrt{-z}$,

(b) gdy $z \notin \mathbf{R}$ to $\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|} \cdot \dfrac{z + |z|}{|z + |z||}$.

16. Niech $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, oraz $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n > 1$. Wykazać, że zbiór $\sqrt[n]{z}$ jest podzbiorem zbioru $\sqrt[mn]{z^m}$. Pokazać także, że zbiory te nie są identyczne.

17. Rozwiązać poniższe równania korzystając z pierwiastków zespolonych.

   (a) $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$
   (b) $z^2 + (1 + i)z - 2 - i = 0$
   (c) $iz^2 + (2 + i)z + 5 - i = 0$
   (d) $z^3 = (2z + i)^3$
   (e) $z^4 = -4(z + 1)^4$

18. (*) Niech z, $z_0 \in \mathbf{C}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Definiujemy dwie funkcje zespolone f, g jako $w = f(z) = ze^{i\alpha}$ oraz $w = g(z) = z_0 + (z - z_0)e^{i\alpha}$. Udowodnić ich poniższe geometryczne własności.

   (a) f jest rotacją wokół początku układu współrzędnych o kąt α.
   (b) g jest rotacją o kąt α wokół punktu odpowiadającego liczbie z_0.

   W obu przypadkach dla $\alpha > 0$ mamy rotację przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a zgodnie dla $\alpha < 0$.

   Używając powyższych funkcji wyznaczyć obraz punktu $P = (1, 3)$, gdy P jest obracany

   - wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 30°$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,
   - wokół punktu $Q = (2, -1)$ o kąt $\alpha = 135°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

19. (*) Przypomnijmy, że arctg A to kąt $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ taki, że $\operatorname{tg} \alpha = A$.

   Używając liczb zespolonych wykazać, że
   $$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$
   Wynik ten, w połączeniu z szeregiem potęgowym funkcji $\operatorname{arctg} x$, pozwala efektywnie wyznaczać przybliżenie liczby π z dość dużą dokładnością.

20. Używając liczb zespolonych wyprowadzić wzór $\sin(5x) = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

21. Używając liczb zespolonych wyprowadzić wzór na sumy podane poniżej.

   (a) $\cos x + \cos(2x) + ... + \cos(nx)$,
   (b) $2\sin x + 4\sin(2x) + ... + 2^n \sin(nx)$.

Krzysztof „El Profe" Michalik