# Lista 2. Wielomiany i funkcje wymierne.

1. Podzielić wielomian $P$ przez $Q$ jeżeli

   (a) $P(x) = 3x^6 + x^3 + x + 1$, $Q(x) = x^3 - x + 1$,

   (b) $P(x) = x^2 + 5x + 1$, $Q(x) = -2x^2 + 5$,

   (c) $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 7$, $Q(x) = 3x + 5$,

   (d) $P(x) = x^3 - 3x + 2$, $Q(x) = x + 2$.

2. (a) $P(x) = 4x^{211} + cx^3 - x^2 + 1$ jest podzielny przez $Q(x) = x + 1$. Wyznaczyć wartość $c$.

   (b) $P(x) = ax^3 + bx^2 + x - 2$ ma pierwiastek $x = 1$, a przy dzieleniu przez $Q(x) = x - 2$ daje resztę $-5$. Obliczyć $a$ i $b$.

3. Poniższe wielomiany mają wielokrotne pierwiastki całkowite. Znaleźć ich krotności.

   (a) $P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

   (b) $P(x) = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

   (c) $P(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 4x + 1$

   (d) $P(x) = x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$

4. Rozłożyć całkowicie poniższe wielomiany na czynniki

   - rzeczywiste,
   - zespolone.

   Użyć dowolnej z popularnych metod: grupowanie składników, wyznaczanie pierwiastków całkowitych/wymiernych/zespolonych, podstawienie nowej zmiennej itd.

   (a) $-x^3 + 19x - 30$

   (b) $2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

   (c) $-\frac{1}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}$

   (d) $5x^3 - 24x^2 + 36x - 16$

   (e) $\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x - 3$

   (f) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 18x - 12$

   (g) $x^4 + x^3 - x - 1$

   (h) $-9x^4 - 3x^3 + 23x^2 - 13x + 2$

   (i) $8x^4 + 20x^3 - 42x^2 + 23x - 4$

   (j) $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

   (k) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

   (l) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2$

   (m) $x^6 + 5x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 11x - 3$

   (n) $(\star)$ $x^5 + 2$

   (o) $(\star)$ $x^7 - 1$

5. Rozłożyć całkowicie poniższe wielomiany na czynniki rzeczywiste.

   (a) $x^4 - 7x^2 + 5$
   (b) $-x^4 - x^2 + 2$
   (c) $2x^4 + 3x^2 + 1$
   (d) $x^4 - 6x^2 + 9$
   (e) $\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{1}{2}$
   (f) $x^4 + 9$
   (g) $x^4 - x^2 + 25$
   (h) $3x^4 + 5x^2 + 9$

6. (*)

   (a) Udowodnić, że jeżeli $z$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych to $\overline{z}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.
   (b) Uzasadnić, że krotności $z$ oraz $\overline{z}$ są takie same.

7. $x = -2 + i$ jest pierwiastkiem $P(x) = -x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 10$. Rozłożyć całkowicie $P$ na czynniki

   - rzeczywiste,
   - zespolone.

8. $x = i\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem podwójnym $P(x) = 2x^6 + x^5 + 13x^4 + 6x^3 + 24x^2 + 9x + 9$. Rozłożyć całkowicie $P$ na czynniki

   - rzeczywiste,
   - zespolone.

9. (a) Używając wzoru $\sin(5x) = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$ (zob. lista 1 "Liczby zespolone") wyznaczyć dokładną wartość $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{5}$ oraz $\sin\frac{4\pi}{5}$.
   (b) Wywnioskować stąd, że $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, a następnie wyrazić w podobnej postaci $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ oraz $\cos\frac{4\pi}{5}$.

10. Korzystając z postaci iloczynowej wielomianów rzeczywistych uzasadnić, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

    Wywnioskować stąd, że zbiorem wartości takich wielomianów jest $\mathbf{R}$.

11. Niech $P = P(x)$ będzie wielomianem zespolonym. Niech $Q = Q(x) = x - x_0$, $x_0 \in \mathbf{C}$, będzie jego czynnikiem o krotności $k \in \mathbf{N}_+$. Niech $W(x) = P'(x)$ będzie pochodną $P$ (definicja pochodnej zespolonej, pochodne podstawowych funkcji oraz reguły różniczkowania są analogiczne jak w przypadku rzeczywistym). Udowodnić poniższe twierdzenie.

    (a) $k = 1 \iff Q$ nie jest czynnikiem $W$.
    (b) $k > 1 \iff Q$ jest czynnikiem $W$ o krotności $k - 1$.

12. (*) Korzystając z poprzedniego zadania oraz indukcji matematycznej udowodnić poniższe twierdzenie o $k$-tej pochodnej dla pierwiastków wielokrotnych.

   Niech $P = P(x)$ będzie wielomianem zespolonym i niech $x_0 \in \mathbf{C}$ będzie jego pierwiastkiem. Wtedy

   $$x_0 \text{ ma krotność } k \in \mathbf{N}_+ \iff P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = ... = P^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ oraz } P^{(k)}(x_0) \neq 0$$

   (pierwszą pochodną, która nie zeruje się w $x_0$ jest $k$-ta pochodna).

   Twierdzenie to pozwala wyznaczyć krotność $x_0$ bez konieczności wielokrotnego dzielenia. Pozwala także na określenie tej krotności w przypadku, gdy $x_0$ nie da się w praktyce obliczyć.

13. Wyznaczyć resztę z dzielenia $P(x) = 2x^{151} + 4x - 1$ przez

   (a) $Q(x) = x^2 + x - 2$,
   (b) $Q(x) = x^3 - 4x$,
   (c) $Q(x) = x^2 + 1$,
   (d) $Q(x) = x^2 + 2x + 2$,
   (e) $Q(x) = x^2 + x\sqrt{3} + 1$,
   (f) $Q(x) = x^2 - 2x + 4$,
   (g) (*) $Q(x) = x^3 - 3x + 2$,
   (h) (*) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$.

14. Zapisać poniższe funkcje w postaci sumy odpowiednich rzeczywistych ułamków prostych, bez obliczania ich współczynników w licznikach.

   (a) $f(x) = \dfrac{x-3}{(x-1)^3(2x-1)(x^2+x+3)(x^2+3)^2}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x^2-5)^3(x^2+5)^3}$

15. Rozłożyć poniższe funkcje na rzeczywiste ułamki proste.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+2x^2-x-2}$
   (c) $f(x) = \dfrac{5}{x^3-3x+2}$
   (d) $f(x) = \dfrac{x^2-4x-3}{x^3+x+2}$
   (e) $f(x) = \dfrac{-4x^2+26x-34}{x^4-8x^3+18x^2-27}$
   (f) $f(x) = \dfrac{2x^3+4x^2+6x+9}{x^4+5x^2+6}$
   (g) $f(x) = \dfrac{x^3+2x+1}{x^4+2x^2+1}$

16. Rozłożyć poniższe funkcje na sumę wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych.

   (a) $f(x) = \dfrac{5x^5 + x - 1}{x^3 + x^2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{4x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

17. (*) Dana jest funkcja wymierna właściwa $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ taka, że wielomiany $P$ i $Q$ nie mają wspólnych czynników.

   (a) Udowodnić, że w jej rozkładzie na ułamki proste ułamki o mianownikach z najwyższą możliwą potęgą muszą się pojawić.

   Czyli np. dla $\dfrac{P(x)}{x^3(x^2+1)^2}$ muszą pojawić się ułamki $\dfrac{A}{x^3}$ oraz $\dfrac{ax+b}{(x^2+1)^2}$ natomiast $\dfrac{B}{x^2}$, $\dfrac{C}{x}$ oraz $\dfrac{Dx+E}{x^2+1}$ mogą nie wystąpić.

   (b) Udowodnić, że w przypadku ułamka prostego pierwszego rodzaju o mianowniku z najwyższą możliwą potęgą przy obliczaniu jego licznika popularna "metoda wstawiania" - przemnożyć równanie

   $\dfrac{P(x)}{Q(x)} =$ suma ułamków prostych

   przez $Q$, a potem wstawić za $x$ odpowiedni pierwiastek $Q$ - prowadzi zawsze do równania z jedną niewiadomą, którą jest szukany licznik tego ułamka.

   Na tej podstawie wyprowadzić wzór ogólny na postać takiego ułamka.

*Krzysztof „El Profe” Michalik*