Lista 3. Macierze i wyznaczniki.

1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ and $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   Obliczyć wszystkie możliwe iloczyny postaci XY oraz XY^T, gdzie $X, Y \in \{A, B, C, D, E\}$.

2. Zbadać jaki jest efekt mnożenia macierzy A przez macierz diagonalną

   (a) z lewej strony,

   (b) z prawej strony.

3. (a) Wykazać, że dla dowolnych macierzy A, B kwadratowych wymiaru 2 macierz $K = AB - BA$ może być przedstawiona w postaci $K = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$.

   Wywnioskować stąd, że $K^2 = c \cdot I$ dla pewnej stałej c.

   (b) Pokazać na przykładzie, że powyższa własność nie musi zachodzić dla macierzy A, B o wymiarach większych niż 2.

4. (Przykłady zastosowania macierzy w geometrii. Przed przystąpieniem do zadania proszę przeczytać wprowadzenie z ostatniej strony.)

   Korzystając z odpowiednich macierzy wyznaczyć współrzędne obrazu punktu $P = (-1, 3)$ względem

   (a) symetrii względem prostej $y = 2x$,

   (b) rzutu prostopadłego na prostą $y = -4x$,

   (c) obrotu wokół $(0, 0)$ o kąt $120°$, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

   (d) obrotu wokół $(0, 0)$ o kąt $45°$, zgodnie z ruchem wskazówek zegara,

   (e) rzutu prostopadłego na prostą $y = x$, a następnie symetrii względem prostej $y = -\frac{1}{2}x$.

5. (*) Korzystając z odpowiedniej macierzy uzasadnić, że jeżeli funkcja f posiada swoją funkcję odwrotną f^{-1} to wykresy f i f^{-1} są do siebie symetryczne względem prostej $y = x$.

6. Dla poniższych macierzy odgadnąć wzory na ich n-te potęgi oraz udowodnić te wzory przez indukcję.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,

   (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

   (d) $\begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & -\frac{1-a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(h) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ (macierz kwadratowa wymiaru n o jednakowych wierszach).

7. Rozwiązać poniższe równania macierzowe.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$,

(b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$,

(c) $X^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$,

(d) $X \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot X$,

(e) $X^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(f) $X^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$,

(g) (*) $aX + bX^T = I_{n\times n},\ a, b \neq 0$.

8. (*)

(a) Udowodnić, że jeżeli $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ są macierzami diagonalnymi to AB też jest diagonalna. Ponadto przekątną AB jest zbiór $\{a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, ..., a_{nn}b_{nn}\}$.

(b) Udowodnić, że analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla macierzy trójkątnych dolnych oraz trójkątnych górnych.

9. Udowodnić, że

(a) jeżeli A jest macierzą kwadratową to $A + A^T$ jest symetryczna, a $A - A^T$ i $A^T - A$ są antysymetryczne,

(b) dla dowolnej macierzy B macierze BB^T i B^TB są symetryczne.

10. Wykazać, że jeżeli A and B są przemienne to

    (a) są kwadratowe tego samego wymiaru,
    (b) $ABBA = BABA = A^2B^2$,
    (c) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$,
    (d) $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$,
    (e) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$,
    (f) $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$.

11. (*) Znaleźć wszystkie macierze przemienne z **każdą** macierzą kwadratową wymiaru n.

12. Znane własności liczb to m. in. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ oraz $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$. Wykazać, że podobne własności w przypadku macierzy kwadratowych nie muszą być prawdziwe. Inaczej mówiąc, znaleźć przykłady takich macierzy X, Y dla których

    (a) $X^2 = \mathbf{0}$ ale $X \neq \mathbf{0}$,
    (b) $X^2 = I$ ale $X \neq I$ oraz $X \neq -I$
    (c) $X \neq Y$ i $XY = \mathbf{0}$ ale $X \neq \mathbf{0}$ oraz $Y \neq \mathbf{0}$.

13. Obliczyć wyznaczniki poniższych macierzy.

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$,
    (b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,
    (c) $\begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & -\frac{1-a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$,
    (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$,
    (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
    (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & a \end{bmatrix}$,
    (g) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - aI_{3\times 3}$.

14. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Rozwinąć $\det(A)$ względem

    (a) pierwszego wiersza,

    (b) drugiej kolumny.

    Następnie obliczyć $\det(A)$.

15. Udowodnić przez indukcję, że wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów z jej przekątnej.

16. Obliczyć poniższe wyznaczniki.

    (a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & -5 \\ 2 & 9 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & -10 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 7 & -2 & 4 \end{vmatrix}$,

    (b) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & 3 & 7 & -2 & a \end{vmatrix}$,

    (c) $\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & a \\ b & a & a & \dots & a & a \\ b & b & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & a \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{n\times n}$,

    (d) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n}$,

    (e) (*) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{n\times n}$.

17. (*) Każdy element macierzy $A_{n\times n}$ jest funkcją liniową zmiennej x (może być stała). Wykazać, że $\det(A)$ jest wielomianem zmiennej x. Jaka może być wartość jego stopnia? Skonstruować odpowiednie przykłady, postawić hipotezę i podać dowód.

18. Poniższe macierze zależą od pewnych parametrów rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie wartości tych parametrów dla których macierze te są osobliwe.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ p & p^3 - 1 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 2\cos\alpha \\ 2\cos\alpha & 3\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 3 & x^2 & 3 \\ x^2-2 & 1 & x^2-2 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & e^x & -1 \\ 2 & -1 & 4e^x \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda I_{3\times 3}$.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ a^4 & a^3 & a^2 & a \end{bmatrix}$,

19. Jeżeli $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = x$ to obliczyć

(a) $\begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 & 3d_3 \\ 4a_4 & 4b_4 & 4c_4 & 4d_4 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 & d_1+d_2 \\ a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 & c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \\ a_1+a_2+a_3+a_4 & b_1+b_2+b_3+b_4 & c_1+c_2+c_3+c_4 & d_1+d_2+d_3+d_4 \end{vmatrix}$,

(e) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 & d_1+d_2 \\ a_2+a_3 & b_2+b_3 & c_2+c_3 & d_2+d_3 \\ a_3+a_4 & b_3+b_4 & c_3+c_4 & d_3+d_4 \\ a_4+a_1 & b_4+b_1 & c_4+c_1 & d_4+d_1 \end{vmatrix}$.

20. Wiadomo, że $A = A_{5\times 5}$ ma $\det(A) = 2$. Obliczyć

   (a) $\det(2A)$,
   (b) $\det(AA^TA)$,
   (c) $\det(-3A^2)$,
   (d) $\det\left(A^m\left(A^T\right)^n\right)$, $m, n \in \mathbf{N}^+$,

21. Obliczyć $\det(A)$ jeżeli $\det(2A^2) = 144$ oraz $\det(3A^T) = 243$.

22. Wyznaczyć rzędy poniższych macierzy.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & -7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -7 & 6 \end{bmatrix}$.

23. Wyznaczyć rzędy poniższych macierzy w zależności od parametru $a \in \mathbf{R}$.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$,

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$,

   (d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & a & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & a \\ 2 & 3 & 1 & -7 & 6 \end{bmatrix}$.

24. Niech $A \neq \mathbf{0}$. Udowodnić równoważność:

   rząd A jest równy 1 $\iff$ wszystkie wiersze A są proporcjonalne.

25. Poniższe macierze zależą od pewnych parametrów rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie wartości tych parametrów dla których macierze te są odwracalne. Następnie wyznaczyć ich macierze odwrotne korzystając ze wzoru wyznacznikowego.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & p \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & x \end{bmatrix}$,

(g) $\begin{bmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 3 & x^2 & 3 \\ x^2-2 & 1 & x^2-2 \end{bmatrix}$,

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

26. Metodą eliminacji wyznaczyć macierze odwrotne do podanych poniżej.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

27. Niech $A \neq \mathbf{0}$ będzie macierzą dla której $A^k = \mathbf{0}$ dla pewnego $k \in \mathbf{N}^+$. Wykazać, że macierzą odwrotną do $I - A$ jest $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{k-1}$.

28. Używając odpowiednich macierzy odwrotnych rozwiązać poniższe równania macierzowe.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$,

(b) $X \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$,

(c) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$,

(g) $X \cdot (I - X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Wprowadzenie do zastosowania macierzy w geometrii.

Rozpatrujemy przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie XY lub w przestrzeni XYZ. Chodzi więc o funkcje postaci $F(P) = Q$, gdzie P jest punktem z przestrzeni $\mathbf{R}^2$ lub $\mathbf{R}^3$, a Q jest jego obrazem. Równoważna forma takich funkcji to $F(\vec{u}) = \vec{v}$, gdzie $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ jest wektorem pozycyjnym punktu P, a $\vec{u} = \overrightarrow{OQ}$ jest wektorem pozycyjnym punktu Q. Wektory te często zapisujemy kolumnowo.

Wśród wielu przekształceń geometrycznych najistotniejszą klasą są tzw. **przekształcenia liniowe**. Są to takie przekształcenia T, które zachowują operacje dodawania wektorów i mnożenia przez liczbę, tzn. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ oraz $T(c \cdot \vec{u}) = c \cdot T(\vec{u}),\ c \in \mathbf{R}$. W szczególności, obrazem wektora zerowego jest wektor zerowy.

Dowodzi się, że każde takie przekształcenie ma wzór postaci

$$T(\vec{u}) = \vec{v} = A \cdot \vec{u},$$

gdzie macierz A jest nazywana macierzą przekształcenia T, a wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są zapisane kolumnowo czyli jako macierze o jednej kolumnie.

Zatem np. w przypadku przekształceń na płaszczyźnie XY jeżeli punkt $Q = (x', y')$ jest obrazem punktu $P = (x, y)$ przez przekształcenie T o macierzy A to A jest kwadratowa wymiaru 2 i spełnione jest równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

co pozwala szybko wyznaczyć obraz P przy pomocy mnożenia odpowiednich macierzy.

Przekształcenia liniowe są istotne, gdyż wśród nich występuje wiele najpopularniejszych przekształceń geometrycznych, takich jak obroty, symetrie, rzuty i skalowania. Oto kilka najpopularniejszych przekształceń w $\mathbf{R}^2$ i ich macierze.

- Obrót (rotacja) wokół punktu $(0, 0)$ o kąt α: $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.
- Symetria względem prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$ i o kącie nachylenia do osi OX równym α: $A = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$.

  W przypadku prostej $y = ax$ daje to macierz $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$.
- Rzut prostopadły na powyższą prostą: $A = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \dfrac{1}{2}\sin(2\alpha) \\ \dfrac{1}{2}\sin(2\alpha) & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$.

  W przypadku prostej $y = ax$ daje to macierz $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$.

Analogicznie, znane są macierze (wymiaru 3) najpopularniejszych przekształceń w $\mathbf{R}^3$.

Na koniec, w przypadku składania przekształceń również pojawia się mnożenie macierzy. Jeżeli przekształcenie liniowe T_1 ma macierz A_1, a przekształcenie T_2 ma macierz A_2 to złożenie $T_2 \circ T_1 = T_2(T_1)$ jest przekształceniem o macierzy $A_2 \cdot A_1$ (kolejność mnożenia jest istotna). To pokazuje, że mnożenie macierzy nie powinno być kojarzone z mnożeniem liczb tylko ze składaniem funkcji.

Krzysztof „El Profe" Michalik