Lista 4. Układy równań liniowych.

1. Niech $a, b, \alpha \in \mathbf{R}$ będą parametrami, a x, y, z niewiadomymi. Używając wzorów Cramera rozwiązać poniższe układy równań.

a) $\begin{cases} 6x + 25y = -1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = a \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = b \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{1-a^2}{1+a^2}x + \dfrac{2a}{1+a^2}y = 1 \\ \dfrac{2a}{1+a^2}x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}y = a \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{1+a^2}x + \dfrac{a}{1+a^2}y = -a \\ \dfrac{a}{1+a^2}x + \dfrac{a^2}{1+a^2}y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{1}{1+a^2}x + \dfrac{a}{1+a^2}y = 1 \\ \dfrac{a}{1+a^2}x + \dfrac{a^2}{1+a^2}y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + 8z = 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$

2. Rozwiązać - tam, gdzie jest to możliwe - układy z poprzedniego zadania metodą macierzy odwrotnej.

3. Rozważmy poniższy układ równań z parametrem $p \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x + (p+2)y + 2z + ps + 3t = 0 \\ x + py + 6z + (p+4)s + 2z = 0 \\ -x - (p+2)y - z - (p-2)s + (p-3)t = 0 \\ 2x + (2p+4)y + 4z + (2p+1)s + 3t = 0 \\ x + (p+2)y + 4z + (p+2)s + 5t = 5 \end{cases}$$

(a) Znaleźć wszystkie wartości p dla których układ ten jest układem Cramera.

(b) Dla $p = 1$ wyznaczyć wartość zmiennej s korzystając ze wzorów Cramera.

4. Rozwiązać poniższe układy równań metodą eliminacji Gaussa.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + 8z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 18z = 19 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = -20 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x + y - 2t = 1 \\ 5x + 2y + 2z - t = 5 \\ x - y - 2t = -5 \\ 5x + y + z - 3t = 0 \\ -7x - 3y + z + 5t = -4 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \\ -2x + 6y + 2z + 4s = 10 \\ -2x + 6y + 4z + 4s + t = 10 \\ -x + 3y + z + 2s = 5 \end{cases}$

5. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ wszystkimi trzema wspomnianymi metodami, tzn.

   a) wzorami Cramera,

   b) metodą macierzy odwrotnej,

   c) metodą eliminacji Gaussa.

6. Wyznaczyć wszystkie $p \in \mathbf{R}$ dla których poniższe układy mają jednoznaczne rozwiązanie. Dla pozostałych p wyznaczyć rozwiązanie tych układów.

   a) $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ y+3z=2 \\ x+3y+pz=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (p+5)x+2y+4z=2 \\ 4x+py+2z=2 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+4y-2z=-p \\ 3x+5y-pz=3 \\ px+3py+z=p \end{cases}$

7. Wyznaczyć wszystkie $p \in \mathbf{R}$ dla których poniższe układy posiadają rozwiązanie. Wyznaczyć to rozwiązanie.

   a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=5 \\ x-2y+2z=p \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z+t=3 \\ 2x+3y-5z+t=p \\ -x-y+6z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ -3x+y-z=p \\ -2x+3y-4z=p^2 \end{cases}$

8. (*) Rozważamy układ równań liniowych w postaci macierzowej $AX=B$, gdzie X to wektor niewiadomych. Niech $A \neq \mathbf{0}$ będzie macierzą kwadratową.

   (a) Dla macierzy A wymiaru 2 przy pomocy twierdzenia Kroneckera-Capellego udowodnić następujące twierdzenie:

   układ ma nieskończenie wiele rozwiązań $\iff$ wszystkie wyznaczniki związane z układem (czyli wyznacznik A i wyznaczniki stowarzyszone z niewiadomymi) mają wartość 0.

   Pokazać ponadto, że wtedy oba równania mają te same rozwiązania (czyli wystarczy rozwiązać jedno z nich).

   (b) Popularnym błędem jest próba zastosowania tego twierdzenia dla macierzy A wymiaru większego niż 2. Podać przykład układu dla którego wszystkie powyższe wyznaczniki są równe 0, a mimo to układ jest sprzeczny.

9. Udowodnić, że jeżeli układ równań liniowych ma mniej równań niż niewiadomych to nie może on mieć jednoznacznego rozwiązania.

Krzysztof „El Profe” Michalik