Lista 5. Geometria wektorowa.

1. Korzystając z odpowiednich wektorów pokazać, że w danym czworokącie punkt przecięcia się przekątnych jest jednocześnie środkiem obu przekątnych dokładnie wtedy, gdy czworokąt jest równoległobokiem.

2. Niech $\vec{u}$ będzie wektorem pozycyjnym punktu A, a $\vec{v}$ będzie wektorem pozycyjnym punktu B. Niech P będzie punktem z odcinka AB, który dzieli ten odcinek na 2 części w proporcji $p : q$, gdzie $p, q > 0$. Inaczej mówiąc, $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{p}{q}$. Znaleźć wektor pozycyjny punktu P.

3. Pokazać, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami pewnego równoległoboku.

4. Zbadać, które z poniższych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są

   - równoległe,
   - prostopadłe.

   (a) $\vec{u} = [12, -15]$, $\vec{v} = [-8, 10]$.
   (b) $\vec{u} = [1, a]$, $\vec{v} = [-a, 1]$, $a \in \mathbf{R}$.
   (c) $\vec{u} = [e, e^2, e^3]$, $\vec{v} = [e^4, e^5, e^6]$.
   (d) $\vec{u} = [6, 7, -1]$, $\vec{v} = [-1, 1, 1]$.
   (e) $\vec{u} = [6, 0, -1]$, $\vec{v} = [-54, 0, 9]$.
   (f) $\vec{u} = [0, 0, -5]$, $\vec{v} = [0, 0, 7]$.
   (g) $\vec{u} = [0, 7, 0]$, $\vec{v} = [3, 0, 5]$.
   (h) $\vec{u} = [3, -6, -1]$, $\vec{v} = [-1, 2, -3]$.
   (i) $\vec{u} = [a, a+1, a+2]$, $\vec{v} = [a+3, a+4, a+5]$, $a \in \mathbf{R}$.

5. Niech $\vec{u} = [2, 2, -1]$. Wyznaczyć

   (a) wektor jednostkowy w kierunku wektora $\vec{u}$,
   (b) wektor o długości 4 i kierunku przeciwnym do $\vec{u}$.

6. Jeżeli współrzędne danego wektora są liczbami wymiernymi to jego długość i tak zazwyczaj jest liczbą niewymierną. Istnieją jednak rzadkie wyjątki od tej reguły.

   Wykazać, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ długości poniższych wektorów są liczbami naturalnymi.

   (a) $\overrightarrow{u_n} = [4n, 4n^2 - 1]$,
   (b) $\overrightarrow{v_n} = [2, 2n - 1, 2n^2 - 2n + 2]$.

7. Rozpatrzmy wektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^n$ takie, że $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ i nie są ani równoległe ani prostopadłe. Ważnym zagadnieniem jest rozkład $\vec{u}$ na 2 składowe - równoległą do $\vec{v}$ i prostopadłą do $\vec{v}$. Oznacza to, że $\vec{u} = \overrightarrow{u_v} + \overrightarrow{u_{\perp v}}$, gdzie $\overrightarrow{u_v} \parallel \vec{v}$ i $\overrightarrow{u_{\perp v}} \perp \vec{v}$.

   $\vec{v}$ oznacza ustalony kierunek referencyjny, a $\overrightarrow{u_v}$ nazywamy rzutem $\vec{u}$ na $\vec{v}$.

(a) Udowodnić, że $\overrightarrow{u_v} = \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$, a stąd $\overrightarrow{u_{\perp v}} = \vec{u} - \dfrac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$.

(b) Dokonać tego rozkładu dla

i. $\vec{u} = [-1, 1]$, gdy $\vec{v} = [2, 3]$,

ii. $\vec{u} = [1, 2, -3]$, gdy $\vec{v} = [-1, 1, 2]$.

8. Wyznaczyć, w radianach, dokładną wartość kąta między poniższymi wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

(a) $\vec{u} = [2, 1]$, $\vec{v} = [-3, 1]$.

(b) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$.

(c) $\vec{u} = [1, 0, 1]$, $\vec{v} = [1, 1, 0]$.

(d) $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} - 3\vec{k}$.

9. Niech $A = (1, 2)$. Wyznaczyć wszystkie punkty B z prostej $x = -1$ takie, że kąt między $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ wynosi $45°$.

10. Niech $A = (5, 2, 1)$ i $B = (3, 6, 3)$.Wyznaczyć wszystkie punkty C z osi X dla których

(a) A, B i C są wierzchołkami trójkąta,

(b) A, B and C są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego.

11. Niech $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^3$ będą wektorami niezerowymi i niech α oznacza kąt między nimi.

(a) Dla $0 < \alpha < \pi$ udowodnić, korzystając z twierdzenia cosinusów dla odpowiedniego trójkąta, że $\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$.

(b) Wykazać, że wzór ten pozostaje prawdziwy dla $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi$.

12. Znaleźć wszystkie wektory jednostkowe prostopadłe jednocześnie do $\vec{u} = [1, 2, 1]$ i $\vec{v} = [1, 1, -1]$ korzystając z

(a) iloczynu skalarnego,

(b) iloczynu wektorowego.

13. Niech $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^3$ będą wektorami niezerowymi.

(a) Pokazać, że $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \circ \vec{v})^2$.

(b) Wywnioskować stąd, że $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, gdzie α jest kątem między $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

14. $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $A = (1, 0, 2)$, $B = (2, 3, 5)$, $C = (1, 2, 7)$ i $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka D i pole tego równoległoboku.

15. Niech $A = (0, 5, -1)$, $B = (0, 6, 1)$ i $C = (x, 7, 4)$. Znaleźć wszystkie $x \in \mathbf{R}$ dla których pole trójkąta ABC jest równe 3.

16. Jeśli $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^2$ i wektory te nie są równoległe to istnieje prostszy wzór niż ten z $\mathbf{R}^3$ na pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach.

(a) Poprzez rozszerzenie $\vec{u}, \vec{v}$ do wektorów z $\mathbf{R}^3$ udowodnić, że pole tego równoległoboku jest dane wzorem $P = \left| \det \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \right|$, gdzie $\vec{u}, \vec{v}$ są wektorami wierszowymi.

(b) Korzystając z tego wzoru obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 7)$, $B = (3, 16)$ oraz $C = (-2, 59)$.

17. (a) Niech $A, B, C \in \mathbf{R}^2$ będą wierzchołkami pewnego trójkąta. Udowodnić, że jeżeli wszystkie współrzędne tych punktów są liczbami wymiernym to również pole tego trójkąta ma zawsze wartość wymierną.

(b) Pokazać, że analogiczna własność nie jest prawdziwa dla $A, B, C \in \mathbf{R}^3$.

18. Udowodnić, że $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \det \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix}$, gdzie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$ są wektorami wierszowymi.

19. Wektory $\vec{u} = [1, 2, 1]$, $\vec{v} = [1, 1, -1]$ i $\vec{w} = [-1, 2, 5]$ mają wspólny początek i rozpinają równoległościan. Znaleźć objętość równoległościanu oraz jego wysokość opuszczoną na podstawę rozpiętą przez $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

20. Niech $A = (1, 0, 2)$, $B = (2, 3, 5)$ i $C = (1, 2, 7)$. Znaleźć wszystkie punkty D z osi Z dla których

(a) objętość czworościanu $ABCD$ jest równa 3,

(b) A, B, C, D są współpłaszczyznowe.

Krzysztof „El Profe” Michalik