Lista 6. Proste i płaszczyzny.

1. Znaleźć równanie ogólne oraz równanie parametryczne prostej, która

   (a) przechodzi przez punkty $(0,0)$ i $P=(1,2)$,
   (b) przechodzi przez punkty $A=(2,3)$ i $B=(-1,5)$,
   (c) przechodzi przez punkt $P=(3,2)$ i jest równoległa do prostej $y=2x$,
   (d) przechodzi przez punkt $P=(3,2)$ i jest prostopadła do prostej $y=3x-1$.

2. Wyznaczyć (najkrótszą) odległość prostej $y=2x+1$ od

   (a) punktu $P=(3,2)$,
   (b) prostej $-4x+2y+5=0$,
   (c) prostej $8x+9y+7=0$.

3. Znaleźć wszystkie proste, które

   (a) przechodzą przez początek układu, a ich odległość od punktu $P=(1,2)$ wynosi 1,
   (b) ich odległość od prostej $y=2x+1$ wynosi 4.

4. Znaleźć równanie ogólne oraz równanie parametryczne płaszczyzny która

   (a) przechodzi przez punkt $A=(2,3,5)$ i jest równoległa do wektorów $\vec{u}=[1,2,3]$ oraz $\vec{v}=[0,5,2]$,
   (b) przechodzi przez punkty $A=(2,3,5)$, $B=(1,7,0)$ i $C=(4,8,1)$,
   (c) przechodzi przez punkt $P=(7,3,2)$ i jest równoległa do płaszczyzny YZ,
   (d) przechodzi przez początek układu i jest prostopadła do prostej łączącej punkty $A=(1,2,3)$ i $B=(7,2,0)$,
   (e) przechodzi przez punkt $P=(1,-1,3)$ i zawiera oś Z.

5. Znaleźć równanie ogólne oraz równanie parametryczne prostej, która

   (a) przechodzi przez punkty $(0,0,0)$ i $P=(1,2,4)$,
   (b) przechodzi przez punkty $A=(1,2,3)$ i $B=(-1,0,5)$,
   (c) jest częścią wspólną płaszczyzn $\Pi_1 : x-y+z+1=0$ i $\Pi_2 : 2x-y+3z=0$,
   (d) przechodzi przez punkt $P=(3,2,-1)$ i jest równoległa do osi Z.

6. Obiekt porusza się w 3 wymiarach ze stałą prędkością $\vec{v}=[2,-2,1]$, gdzie każda współrzędna $\vec{v}$ jest dana w m/s. Niech t oznacza czas mierzony w sekundach. W chwili $t=0$ obiekt znajdował się w punkcie $P_0=(1,6,-7)$, gdzie każda współrzędna dana jest w metrach.

   (a) Wyznaczyć w postaci parametrycznej trajektorie ruchu obiektu jako funkcje czasu t.
   (b) Wyznaczyć położenie obiektu
      - w chwili $t=5$,
      - 2 sekundy przed osiągnięciem punktu P_0 .
   (c) Znaleźć położenie obiektu w momencie, gdy dotrze do płaszczyzny XZ.
   (d) Sprawdzić, czy obiekt osiągnie punkty $A=(17,-10,1)$ oraz $B=(11,-4,-1)$.
   (e) Wyznaczyć szybkość obiektu oraz odległość, którą przebywa w czasie 4 sekund.

7. Opisać wzajemne położenie poniższych płaszczyzn (równoległe, identyczne, o wspólnej krawędzi).

(a) $\Pi_1 : 3x - 2y + 3z + 1 = 0$ i $\Pi_2 : x - y - z - 7 = 0$,

(b) $\Pi_1 : 6x + 2y - 4z - 10 = 0$ i $\Pi_2 : -3x - y + 2z + 5 = 0$,

(c) $\Pi_1 : x - 2y + 3z = 0$ i $\Pi_2 : 0.1x - 0.2y + 0.3z + 1 = 0$,

(d) $\Pi_1 : x - 2y - 3z - 4 = 0$ i $\Pi_2 : \begin{cases} x = 3 - s + t \\ y = 2 + s - t \\ z = 1 + 2s + t \end{cases}, s, t \in \mathbf{R}$,

(e) $\Pi_1 : x - 2y - 3z - 4 = 0$ i $\Pi_2 : \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 2s - t \\ z = -1 - s + t \end{cases}, s, t \in \mathbf{R}$,

(f) $\Pi_1 : x - 2y - 3z - 4 = 0$ i $\Pi_2 : \begin{cases} x = 2 - s - t \\ y = -4 - 2s + t \\ z = 7 + s - t \end{cases}, s, t \in \mathbf{R}$,

(g) $\Pi_1 : \begin{cases} x = 2 + s + t \\ y = 4 - s \\ z = 5s + 3t \end{cases}, s, t \in \mathbf{R}$, i $\Pi_2 : \begin{cases} x = 2 + a + b \\ y = 1 - a - b \\ z = 2 - 3a + 2b \end{cases}, a, b \in \mathbf{R}$,

(h) $\Pi_1 : \begin{cases} x = s + t \\ y = s + 3t \\ z = -s - 2t \end{cases}, s, t \in \mathbf{R}$, i $\Pi_2 : \begin{cases} x = a - 3b \\ y = -a - b \\ z = 2b \end{cases}, a, b \in \mathbf{R}$,

(i) $\Pi_1 : \begin{cases} x = 2 + 3s + 5t \\ y = 4 + s + t \\ z = -1 - 2s - 3t \end{cases}, s, t \in \mathbf{R}$, i $\Pi_2 : \begin{cases} x = 5 - 4a + b \\ y = 1 - 2a - 3b \\ z = 3a + b \end{cases}, a, b \in \mathbf{R}$.

8. (kontynuacja poprzedniego zadania) Opisać wzajemne położenie poniższych płaszczyzn w zależności od podanych parametrów A, B, C, D i E.

(a) $\Pi_1 : Ax + By + Cz + D = 0$ i $\Pi_2 : 2Ax + 2By + 2Cz + E = 0$,
gdzie $A, B, C, D, E \in \mathbf{R}$ i $A \neq 0 \vee B \neq 0 \vee C \neq 0$,

(b) $\Pi_1 : x + By + Cz + D = 0$ i $\Pi_2 : -2x + 3y - z + 1 = 0$,
gdzie $B, C, D \in \mathbf{R}$,

(c) $\Pi_1 : Ax + z + 5 = 0$ i $\Pi_2 : x + By - z + 1 = 0$,
gdzie $A, B, \in \mathbf{R}$,

(d) $\Pi_1 : Ax + By + D = 0$ i $\Pi_2 : x - z + E = 0$,
gdzie $A, B, D, E \in \mathbf{R}$ i $A \neq 0 \vee B \neq 0$.

9. Opisać wzajemne położenie poniższych prostych (równoległe, identyczne, o jednym wspólnym punkcie, skośne). W przypadku, gdy przecinają się w jednym punkcie wyznaczyć jego współrzędne.

(a) $L_1 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + 2s \end{cases}, s \in \mathbf{R}$, i $L_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(b) $L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{5}$ i $L_2 : \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-5}$,

(c) $L_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$,

(d) $L_1: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 3 + s \\ z = 4 \end{cases}, s \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(e) $L_1: x = y = 2z$ i $L_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(f) $L_1: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$,

(g) $L_1: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 3 - s \\ z = 4s \end{cases}, s \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(h) $L_1: \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$.

10. (kontynuacja poprzedniego zadania) Opisać wzajemne położenie prostych w zależności od parametru a.

(a) $L_1: \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + as \end{cases}, s \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(b) $L_1: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = a + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$,

(c) $L_1: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 3 + s \\ z = a \end{cases}, s \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

11. Opisać wzajemne położenie poniższych prostych i płaszczyzn (równoległe, o jednym wspólnym punkcie, prosta zawarta w płaszczyźnie). W przypadku, gdy przecinają się w jednym punkcie wyznaczyć jego współrzędne.

(a) $L: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $\Pi: 3x + 2y - 5z + 1 = 0$,

(b) $L: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $\Pi: x + y - z - 2 = 0$,

(c) $L: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $\Pi: -x - y + z + 9 = 0$,

(d) $L: \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$ i $\Pi: 2x + 3y - z = 0$,

(e) $L: \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$ i $\Pi: x+y+z+1=0$,

(f) $L: \begin{cases} 2x-3y+z+1=0 \\ 3x-2y+2z+2=0 \end{cases}$ i $\Pi: x+y+z+1=0$.

12. (kontynuacja poprzedniego zadania) Opisać wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w zależności od parametru a.

(a) $L: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=at \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, i $\Pi: 3x+2y-5z+1=0$,

(b) $L: \begin{cases} x=a+2t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, i $\Pi: x+y-z-2=0$,

(c) $L: \begin{cases} 2x-3y+z+1=0 \\ 3x-2y+2z+2=0 \end{cases}$ i $\Pi: ax+y+z+1=0$, $a \in \mathbf{R}$.

13. Obliczyć odległość między

(a) płaszczyznami $\Pi_1: x-y+2z+1=0$ i $\Pi_2: 2x-2y+4z+7=0$,

(b) płaszczyznami $\Pi_1: x+2y+3z=0$ i $\Pi_2: \begin{cases} x=1-s+t \\ y=2-s \\ z=2s+3t \end{cases}$, $s,t \in \mathbf{R}$,

(c) $\Pi: x+y+z+1=0$ and $L: \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$,

(d) płaszczyzną $\Pi: x+y-z-2=0$ i prostą $L: \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$,

(e) płaszczyzną $\Pi: 3x-2y+z+1=0$ i prostą $L: \begin{cases} x=2-t \\ y=3+t \\ z=4t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

14. Dane są płaszczyzny $\Pi_1: 2x+3y+6z+1=0$ i $\Pi_2: Ax+By+z+D=0$, gdzie $A,B,D \in \mathbf{R}$. Wyznaczyć wszystkie wartości parametrów A,B,D dla których odległość między tymi płaszczyznami wynosi 2.

15. Dana jest płaszczyzna $\Pi: x-y+2z+1=0$ i prosta $L: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=a+bt \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, $a,b \in \mathbf{R}$.

Wyznaczyć wszystkie wartości parametrów a i b dla których

(a) L jest zawarta w Π,

(b) odległość między L i Π wynosi 1,

(c) jedynym punktem wspólnym L i Π jest $P=(2,1,-1)$.

16. Wyznaczyć odległość między

(a) punktem $P=(2,1,-1)$ i prostą $L: \begin{cases} x=3-t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

(b) prostymi $L_1: \begin{cases} x=1-s \\ y=2+s \\ z=3+2s \end{cases}, s \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x=2t \\ y=3-2t \\ z=1-4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(c) prostymi $L_1: \begin{cases} x=2-s \\ y=3+s \\ z=4 \end{cases}, s \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=-3+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(d) prostymi $L_1: x=y=2z$ i $L_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(e) prostymi $L_1: \begin{cases} x+2y-3z+1=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x-y+3=0 \\ y+2z+1=0 \end{cases}$.

17. Znaleźć rzut prostopadły punktu $P=(1,2,5)$ na

(a) płaszczyznę $\Pi: x+2y-2z+1=0$,

(b) płaszczyznę $\Pi: \begin{cases} x=1-s+t \\ y=2+t \\ z=3-s-t \end{cases}, s,t \in \mathbf{R}$,

(c) prostą $L: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(d) prostą $L: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$.

18. Wyznaczyć, w radianach, dokładną wartość kąta ostrego między

(a) prostymi $L_1: x=y=2z$ i $L_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(b) prostymi $L_1: \begin{cases} x=2-s \\ y=3+s \\ z=4 \end{cases}, s \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=-3+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

(c) prostymi $L_1: \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i $L_2: \begin{cases} x+y+z-5=0 \\ 2y-z+3=0 \end{cases}$,

(d) płaszczyznami $\Pi_1: 3x-2y+3z+1=0$ i $\Pi_2: x-y-z-7=0$,

(e) płaszczyznami $\Pi_1: x-2y+3z=0$ i $\Pi_2: 0.1x-0.2y+0.3z+1=0$,

(f) płaszczyznami $\Pi_1: x-2y-3z-4=0$ i $\Pi_2: \begin{cases} x=3-s+t \\ y=2+s-t \\ z=1+2s+t \end{cases}, s,t \in \mathbf{R}$,

(g) prostą $L: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, i płaszczyzną $\Pi: 3x+2y-5z+1=0$,

(h) prostą $L : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, i płaszczyzną $\Pi : x + y - z - 2 = 0$,

(i) prostą $L : x = y = z$ i płaszczyzną $\Pi : x + y + z - 2 = 0$.

19. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a dla których

(a) prosta $L : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = at \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, jest prostopadła do płaszczyzny $\Pi : 2x - 2y - 5z + 1 = 0$,

(b) kąt między L i Π wynosi 60°.

Krzysztof „El Profe" Michalik