Wstęp.

Lista ta dotyczy wszystkich wariantów kursu Analiza Matematyczna 1 i jest uzupełnieniem list pozostałych autorów. Zawiera m.in. zadania typu powtórkowego ze szkoły średniej oraz dotyczące rozszerzenia materiału kursu i szczegółów, które z braku czasu trudno dokładnie omówić na wykładzie. Ważne są też problemy typu badawczego, gdzie trzeba samodzielnie przeanalizować przykłady, sformułować hipotezę oraz ją udowodnić. Część zadań pochodzi z dawnych list sprzed kilku lat i są one na tyle istotne i ciekawe, że postanowiłem ocalić je od zapomnienia. Zadania najbardziej zaawansowane są oznaczone symbolem ($\star$).

Jest to pierwsza wersja tej listy i będzie ona wzbogacana o nowe przykłady na bieżąco.

Używane oznaczenia:

- $\mathbf{N}$ - zbiór liczb naturalnych wraz z zerem,
- $\mathbf{Z}$ - zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbf{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbf{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,
- A_+ - zbiór liczb dodatnich ze zbioru $A \subset \mathbf{R}$,
- Y_f - zbiór wartości danej funkcji f.

Krzysztof Michalik

1. Logika matematyczna.

1. Wykazać, że poniższe formuły są zdaniami w logice.

   (a) $[\neg(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$.

   (b) $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$.

   (c) $[\neg(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(\ (\neg p) \wedge q\ ) \vee (\ (\neg q) \wedge p\ )]$.

   (d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

2. Napisać zaprzeczenie poniższych zdań tak aby końcowa odpowiedź nie zawierała żadnego znaku negacji.

   (a) $x = 2 \vee x = 3$.

   (b) $x \leq 2 \vee x \geq 3$.

   (c) $x \geq 2 \wedge x < 3$.

   (d) $n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 13 \wedge n < 20$.

   (e) $4 < x < 7 \vee x \leq 10$.

   (f) $k \in \mathbf{Z} \wedge (k \leq -6 \vee k \geq 25)$.

   (g) $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$.

   (h) $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

   (i) Zjem ciastko ale nie wypiję herbaty.

   (j) Jeśli f jest funkcją rosnącą to $2f$ też jest funkcją rosnącą.

   (k) Liczba a jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a^3 jest dodatnia.

3. Używając kwantyfikatorów, operatorów logicznych i liczb zapisać poniższe twierdzenia.

   (a) Równanie $x^3 - 3x + 8 = 0$ ma rozwiązanie.

   (b) Równanie $x^3 - 3x + 8 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

   (c) Układ równań
   $$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}, \quad x, y \in \mathbf{R},$$
   ma rozwiązanie.

   (d) Układ równań
   $$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}, \quad x, y \in \mathbf{R},$$
   nie ma rozwiązania.

   (e) 14371 jest liczbą pierwszą.

   (f) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.

   (g) 2 jest najmniejszym elementem zbioru $A = \{n! + 1 :\ n \in \mathbf{N}\}$.

   (h) Największy wspólny dzielnik liczb 8, 12 i 22 to 2.

   (i) Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 3, 4 i 6 to 12.

4. Napisać zaprzeczenie poniższych zdań tak aby końcowa odpowiedź nie zawierała żadnego znaku negacji.

   (a) $\forall x \in \mathbf{R} \;\; x^2 + 2x < 0$.
   (b) $\forall x \in \mathbf{Z} \;\; 2^x \neq 3$.
   (c) $\exists x \in \mathbf{R} \;\; x^2 + 2x < 0$.
   (d) $\exists x \in \mathbf{Z} \;\; 2^x \neq 3$.
   (e) $\forall x \in D_f \;\; f(-x) = f(x)$
   (to oznacza, że f jest parzysta na swojej dziedzinie D_f).
   (f) $\forall x_1, x_2 > 0 \;\; x_2 > x_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_2}} > \frac{1}{\sqrt{x_1}}$
   (to oznacza, że $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ jest malejąca na $(0, \infty)$).
   (g) $\forall x \in \mathbf{R} \; \exists y \in \mathbf{R} \;\; x^2 + y^3 = 0$.
   (h) $\exists y \in \mathbf{R} \; \forall x \in \mathbf{R} \;\; x^2 + y^3 = 0$.
   (i) $\forall y \in \mathbf{R} \; \exists x \in \mathbf{R} \;\; y = x^4 - x$
   (to oznacza, że dla $f(x) = x^4 - x$ mamy $Y_f = \mathbf{R}$).
   (j) $\exists M \in \mathbf{R} \; \forall n \in \mathbf{N}_+ \;\; a_n \leq M$,
   (to oznacza, że M jest ograniczeniem górnym ciągu a_n.
   (k) $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N}_+ \; \forall n \in \mathbf{N}_+, n \geq n_0 \;\; |a_n - L| \leq \epsilon$.
   (to oznacza, że liczba L jest granicą ciągu a_n).

5. Wykazać fałszywość poniższych twierdzeń poprzez odpowiedni dobór kontrprzykładów.

   (a) $\forall n \in \mathbf{N} \;\; 2^n \geq n^2$.
   (b) $\forall n \in \mathbf{N}_+ \; 2^n + 3$ jest liczbą pierwszą.
   (c) $\forall n \in \mathbf{N} \;\; n^6 - n$ jest podzielna przez 6.
   (d) $\forall x \in \mathbf{R} \;\; 9x^2 + 12x + 4 > 0$.
   (e) $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \;\; x_2 > x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$.
   (f) $\forall x, y > 0 \;\; xy > 1 \Rightarrow (x > 1 \wedge y > 1)$.
   (g) $\forall x \in \mathbf{R} \; \exists y \in \mathbf{R} \;\; xy \neq 0$.
   (h) Jeżeli ciąg a_n jest arytmetyczny to ciąg $|a_n|$ też jest arytmetyczny.
   (i) Jeżeli ciąg $|a_n|$ jest geometryczny to a_n też jest geometryczny.

6. Udowodnić nie wprost poniższe twierdzenia.

   (a) $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.
   (b) $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.
   (c) Jeżeli $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ i $y \notin \mathbf{Q}$ to $xy \notin \mathbf{Q}$.
   (d) $A \subset B \;\Rightarrow A \setminus B = \emptyset$.

7. Udowodnić poniższe twierdzenia dowolną metodą.

   (a) Niech $x, y > 0, \;\; y \neq 1$. Wtedy
   $\log_y x \in \mathbf{Q} \;\Leftrightarrow\; \exists a > 0, a \neq 1 \; \exists p \in \mathbf{Q} \; \exists q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \;\; x = a^p, \; y = a^q$.

(b) a_n jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy
$\exists A, B \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}_+ \quad a_n = An + B.$

(c) Jeżeli ciąg a_n jest geometryczny to $|a_n|$ też jest geometryczny.

(d) Niech f będzie funkcją parzystą lub nieparzystą. Wtedy

- gdy x_0 jest jej miejscem zerowym to $-x_0$ też jest jej miejscem zerowym,
- gdy f jest monotoniczna na przedziale (a, b), $a < b$, to jest monotoniczna na przedziale $(-b, -a)$.

2. Podstawowe równania i nierówności elementarne.

1. Rozwiązać poniższe nierówności wielomianowe.

   (a) $x(x-1)(x-2) > 0$.

   (b) $(x-1)^2(x+3) < 0$.

   (c) $(1-x)x^6 \geq 0$.

   (d) $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 13x + 5 \geq 0$.

   (e) $x^5 - 5x^3 + 6x \leq 0$.

2. Rozwiązać poniższe nierówności wymierne.

   (a) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 0$.

   (b) $\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+3} < 0$.

   (c) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1} \geq 0$.

   (d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+8x+4} \leq 0$.

   (e) $\dfrac{2}{x-2} > \dfrac{1}{x-3}$.

   (f) $\dfrac{x}{x^2-3x+2} \geq \dfrac{1}{x+1}$.

   (g) $\dfrac{2x+1}{x^2+5x+6} \leq \dfrac{3}{x+2}$.

3. Rozwiązać poniższe równania i nierówności z wartością bezwzględną.

   (a) $|x+2| = 2x-3$.

   (b) $|x-2| < |x+3|$.

   (c) $|x-1| + |x| = 5$.

   (d) $|x+2| + |x-1| < 7$.

   (e) $\dfrac{x}{|x+1|} = \dfrac{1}{x+1}$.

   (f) $|x+1|(x-2) < 1$.

   (g) $|x^2-3x| = 1$.

   (h) $|x^2+4x| > 3$.

   (i) $3 \leq |x^2+2x| < 8$.

   (j) $|x^3-3x| = 2$.

   (k) $|x^3+x+1| \geq 1$.

4. Rozwiązać poniższe równania i nierówności z pierwiastkami.

   (a) $\sqrt{x} = 5$.

   (b) $\sqrt[3]{x} = 5$.

   (c) $\sqrt{x} = -5$.

(d) $\sqrt[3]{x} = -5$.

(e) $\sqrt{x} > 5$.

(f) $\sqrt[3]{x} > 5$.

(g) $\sqrt{x} > -5$.

(h) $\sqrt[3]{x} > -5$.

(i) $\sqrt{x} < 5$.

(j) $\sqrt[3]{x} < 5$.

(k) $\sqrt{x} < -5$.

(l) $\sqrt[3]{x} < -5$.

(m) $\sqrt{3x+1} = x+1$.

(n) $\sqrt{x-1} = 4-x$.

(o) $\sqrt{x} > x-1$.

(p) $\sqrt{5x+9} \leq x+3$.

(q) $\sqrt{x^2-6} \geq 3-x$.

5. Niech $x \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}$. Rozwiązać poniższe równania wykładnicze i logarytmiczne.

(a) $4^x = 5$.

(b) $e^x = 3$.

(c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 5$.

(d) $5^x = 0$.

(e) $11^x = -2$.

(f) $(-2)^n = -32768$.

(g) $(-3)^n = 6561$.

(h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{2048}{177147}$.

(i) $(-5)^n = 78125$.

(j) $(-4)^n = -65536$.

(k) $\log_2 x = 3$.

(l) $\log x = -0.3$.

(m) $\ln x = 3$.

(n) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$.

(o) $\log_x 2 = 3$.

(p) $\log_x 3 = 2$.

6. Rozwiązać poniższe nierówności wykładnicze i logarytmiczne.

(a) $2^x > 6$.

(b) $0.3^x \geq 2$.

(c) $(\ln 2)^x < 1$.

(d) $174^x \leq 0$.

(e) $0.4^x \geq -2$.

(f) $\pi^x < -0.0001$.

(g) $3^x > -1$.

(h) $\log x \geq -3$.

(i) $\log_6 x \leq \dfrac{16}{5}$.

(j) $\log_{0.8} x > 2$.

(k) $\ln x < -4$.

7. Zapisać jako pojedynczy logarytm czyli w postaci $\log_a(...)$.

   (a) $4\log_7 5 - \frac{1}{6}\log_7 2 + 2\log_7 3$,

   (b) $3 - 4\log x + \frac{1}{2}\log y$,

   (c) $-\ln 3 - \frac{3}{4}\ln 5 - 2$,

   (d) $\log_4 5 + 3\log_2 3 - \log_{\sqrt{2}} 9$,

   (e) $\log_{3\sqrt[7]{9}} 2 + \log_{729} 5 - 2\log_{\frac{1}{27}} 4 - 1$.

8. Gdy $x = \log_3 a$, $y = \log_3 b$ i $z = \log_3 c$ zapisać jako wyrażenie zawierające tylko x, y, z (bez a, b, c).

   (a) $\log_3(ab^4\sqrt{c})$,

   (b) $\log_9 \dfrac{\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{b^4}}{c^{11}}$,

   (c) $\log_{\frac{1}{81}}(ab^2c^{-2})$.

3. Podstawowe własności funkcji.

1. Znaleźć dziedziny naturalne poniższych funkcji.

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4} + \dfrac{1}{2x^2+x+1}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{4}{x}+5} - \dfrac{2}{\dfrac{1}{x^2}-9}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{3^x+5} + \dfrac{1}{(0.4)^x-7}$.

   (d) $f(x) = -\dfrac{5}{\sqrt{3-x^2}} + \sqrt[3]{x}$.

   (e) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+x-2} + \sqrt{x+1}$.

   (f) $f(x) = \sqrt{8-2^x} + \sqrt{10^x-0.01}$.

   (g) $f(x) = \sqrt[4]{2-\sqrt{x+1}}$.

   (h) $f(x) = \sqrt{\sqrt{8-x}-2}$.

   (i) $f(x) = \sqrt{\sqrt{8-x}+2}$.

   (j) $f(x) = \log_3(x+5) + \log_3(x-4)$.

   (k) $f(x) = \log_4(2^x-4) + \ln(10000-10^x)$.

   (l) $f(x) = \dfrac{1}{4+\ln x}$.

   (m) $f(x) = \sqrt{\log_2 x + 5}$.

   (n) $f(x) = \ln(\log_{0.7} x)$.

   (o) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{\log(1-\sqrt{x})}$.

   (p) $\sqrt{1+2\log_{0.01}(x+1)} + \dfrac{1}{x^2-x-6}$.

   (q) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3}{\sqrt{2^x-4}-2}\right)$.

2. Analizując odpowiednie równania liniowe lub kwadratowe z parametrem wyznaczyć, bezpośrednio z definicji, zbiór wartości poniższych funkcji.

   (a) $y = \dfrac{5}{3-x}$.

   (b) $y = \dfrac{5x-1}{x+2}$.

   (c) $y = x + \dfrac{5}{x}$.

   (d) $y = \dfrac{-2x^2+3}{2x-1}$.

   (e) $y = \dfrac{x}{4x^2+1}$.

   (f) $y = \dfrac{x+1}{x^2+x+4}$.

(g) $y = \dfrac{1-2x}{(x+2)^2}$.

(h) $y = \dfrac{2x+1}{x^2-6x+9}$.

(i) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$.

(j) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x}$.

(k) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

(l) $y = \dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$.

(m) $y = \dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$.

3. W obwodzie elektrycznym mamy źródło prądu stałego o napięciu U i oporności wewnętrznej $r = 1$ (jedna ustalona jednostka) do którego podłączono urządzenie o oporności R jednostek.

   (a) Znaleźć wzór na wydzieloną moc na tym urządzeniu jako funkcję R.

   (b) Korzystając z techniki z poprzedniego zadania znaleźć R dla którego wydzielona moc będzie największa.

4. Trygonometria.

1. W układzie współrzędnych narysować kąty $\arcsin\frac{1}{6}$, $\arccos\frac{2}{5}$, $\operatorname{arctg} 6$ oraz $\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$.

2. Udowodnić poniższe tożsamości.

   (a) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ dla $-1 \le x \le 1$.

   (b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla $-1 \le x \le 1$.

   (c) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbf{R}$.

3. Udowodnić poniższe tożsamości.

   (a) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \le x < 1$.

   (b) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ dla $0 < x \le 1$.

   (c) $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ dla $x > 0$.

4. Znaleźć dziedziny naturalne poniższych funkcji. Korzystając z poprzedniego zadania uprościć ich wzory tak, by nie zawierały żadnych operacji trygonometrycznych.

   (a) $\cos(\arcsin x)$.

   (b) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$.

   (c) $\sin(\arccos x)$.

   (d) $\operatorname{tg}(\arccos x)$.

   (e) $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

   (f) $\cos(\operatorname{arctg} x)$.

5. Poniższe katy zapisać w postaci $a\pi$, $a \in \mathbf{Q}$.

   (a) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

   (b) $\arcsin\left(\sin\frac{5}{7}\pi\right)$.

   (c) $\arccos\left(\cos\frac{5}{7}\pi\right)$.

   (d) $\arccos\left(\cos\frac{9}{7}\pi\right)$.

   (e) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5}{7}\pi\right)$.

   (f) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9}{7}\pi\right)$.

   (g) $\arccos\left(\sin\frac{5}{7}\pi\right)$.

   (h) $\arcsin\left(\cos\frac{9}{7}\pi\right)$.

6. (*) Zapisać poniższe funkcje w postaci funkcji o wielu wzorach na odpowiednich podzbiorach tak, by wzory te nie zawierały funkcji trygonometrycznych.

   (a) $\arcsin(\sin x)$.
   (b) $\arccos(\cos x)$.
   (c) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$.

7. Rozwiązać poniższe równania.

   (a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $x \in [0, 2\pi]$.
   (b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ dla $x \in [-\pi, 2\pi]$.
   (c) $\mathrm{tg}x = 1$ dla $x \in [0, 3\pi]$.
   (d) $\sin x = 1$ dla $x \in [-120^\circ, 240^\circ]$.
   (e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dla $x \in [-300^\circ, 30^\circ]$.
   (f) $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$ dla $x \in [-180^\circ, 360^\circ]$.
   (g) $\sin x = 0.4$ dla $x \in [0, 2\pi]$.
   (h) $\cos x = \frac{1}{4}$ dla $x \in [-\pi, 3\pi]$.
   (i) $\mathrm{tg}x = 7$ dla $x \in [0, 2\pi]$.
   (j) $\sin x = -\ln 2$ dla $x \in [-180^\circ, 180^\circ]$.
   (k) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{6}$ dla $x \in [0^\circ, 500^\circ]$.
   (l) $\mathrm{tg}x = \frac{1}{2}$ dla $x \in [-360^\circ, 120^\circ]$.
   (m) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ dla $x \in [0, 2\pi]$.
   (n) $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ dla $x \in [-2\pi, 3\pi]$.
   (o) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dla $x \in [0, 2\pi]$.
   (p) $\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}$ dla $x \in [-180^\circ, 180^\circ]$.
   (q) $\cos(x + 80^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dla $x \in [-360^\circ, 360^\circ]$.
   (r) $\mathrm{tg}(2x - 100^\circ) = 2$ dla $x \in [0^\circ, 180^\circ]$.

8. Rozwiązać poniższe równania.

   (a) $\sin x = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$ dla $x \in [0, 2\pi]$.
   (b) $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
   (c) $\mathrm{tg}(2x) = \mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - 3x\right)$ dla $x \in [0, \pi]$.
   (d) $\sin(x - 140^\circ) = \sin(x + 220^\circ)$ dla $x \in [-1000^\circ, 1000^\circ]$.

(e) $\cos(x+80°) = \cos(x-80°)$ dla $x \in [-360°, 360°]$.

(f) $\mathrm{tg}(x+80°) = \mathrm{tg}(x-80°)$ dla $x \in [0°, 180°]$.

9. Rozwiązać poniższe równania.

   (a) $4\sin x = 5\cos x$ dla $x \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\mathrm{tg}^2 x = 3$ dla $x \in [-180°, 180°]$.

   (c) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0)$ dla $x \in [0°, 360°]$.

   (d) $\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x = 0$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

   (e) $\sin(2x) = 2\cos x$ dla $x \in [0, \pi]$.

   (f) $\cos(2x) = 3 - 2\cos x$ dla $x \in [-100°, 200°]$.

   (g) $\sin x = 4\mathrm{tg}x$ dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

   (h) $\cos x = 1.5\mathrm{tg}x$ dla $x \in [0°, 180°]$.

   (i) $\mathrm{tg}(2x) = 2\mathrm{tg}x$ dla $x \in [0°, 180°]$.

   (j) $\sin(3x) = 2\sin x$ dla $x \in [0, 2\pi]$.

10. Rozwiązać poniższe nierówności.

   (a) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $x \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\cos x \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

   (c) $1 \leq \mathrm{tg}x < \sqrt{3}$ dla $x \in [0, 3\pi]$.

   (d) $\sin\left(\frac{3}{4}x\right) > -\frac{1}{2}$ dla $x \in [-180°, 180°]$.

   (e) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 > 0$ dla $x \in [0°, 360°]$.

   (f) $\cos^2 x - \cos x \leq 0$ dla $x \in [0, 4\pi]$.

   (g) $2\sin x < \mathrm{tg}x$ dla $x \in [0°, 360°]$.

11. Niech $a, b \neq 0$. Wykazać, że funkcja postaci $f(x) = a\sin x + b\cos x$ jest szczególnym przykładem tzw. sinusoidy, a dokładniej, może być przedstawiona w postaci

    $f(x) = A\sin(x+\alpha)$,

    gdzie $A > 0$ i $\alpha \in [0, 2\pi)$. Znaleźć wzór na A oraz wykazać, że kąt α jest wyznaczony jednoznacznie poprzez równania $\cos\alpha = \frac{a}{A}$, $\sin\alpha = \frac{b}{A}$.

12. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania rozwiązać poniższe równania.

   (a) $\sin x + \cos x = 1$ dla $[-\pi, \pi]$.

   (b) $\sin x - \cos x = 1$ dla $[0°, 360°]$.

   (c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ dla $[-\pi, \pi]$.

   (d) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ dla $[-180°, 180°]$.

   (e) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$ dla $[-\pi, \pi]$.

   (f) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ dla $[0°, 360°]$.

   (g) $3\sin x + 4\cos x = 5$ dla $[0°, 360°]$.

   (h) $3\sin x - 4\cos x = 1$ dla $[-\pi, \pi]$.

13. Udowodnić następujące równości

    (a) $\arcsin \frac{4}{\sqrt{17}} - \arccos \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{\pi}{4}$.

    (b) $\mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3 = \frac{3}{4}\pi$.

14. (*) Wykazać, że
    $\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\frac{1}{239}$.
    Wynik ten w połączeniu z szeregiem potęgowym funkcji $\mathrm{arctg}x$ pozwala efektywnie liczyć liczbę π z dużą dokładnością.

15. Udowodnić, że dla $x < 1$ prawdziwy jest wzór
    $\mathrm{arctg}x + \frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\frac{x+1}{1-x}$.
    Znaleźć i udowodnić wersję tego wzoru dla $x > 1$.

5. Ciągi liczbowe.

1. Korzystając z definicji udowodnić dowolne trzy reguły arytmetyki granic skończonych, każdą z innym typem operacji.

2. Korzystając z definicji udowodnić dowolne trzy reguły arytmetyki granic nieskończonych, każdą z innym typem operacji.

3. Korzystając z definicji udowodnić, że

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, co daje regułę $|-\infty| = \infty$.

4. (*) (próba odwrócenia implikacji z poprzedniego zadania) Niech $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = L > 0$. Co można powiedzieć o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? Przeanalizować różne przykłady, rozpatrzyć różne przypadki, sformułować wniosek i podać dowód.

5. (*) (próba stworzenia arytmetyki granic, gdy pojawia się rozbieżność)

   Co można powiedzieć o "operacjach" podanych poniżej? Lewa strona odnosi się do ciągów, które mają granice skończone (liczba), nieskończone (jedna z nieskończoności) lub nie mają granicy (brak granicy). Czy da się zdefiniować prawą stronę tych "operacji"?

   Np. brak granicy + nieskończoność oznacza, że a_n nie ma żadnej granicy, a b_n jest rozbieżny do ∞ lub do $-\infty$. Co możemy powiedzieć o granicy $a_n + b_n$?

   Jeśli odpowiedź jest jednoznaczna to podać dowód. Jeśli wszystko jest możliwe to podać odpowiednie przykłady. Jeśli odpowiedź nie jest jednoznaczna ale nie wszystko jest możliwe to podać odpowiednie przykłady dla wyników, które mogą się pojawić oraz dowody dla wyników, które nie mogą mieć miejsca.

   - brak granicy $\pm$ liczba,
   - brak granicy $\pm$ nieskończoność,
   - brak granicy $\pm$ brak granicy,
   - brak granicy $\cdot$ liczba $\neq 0$,
   - brak granicy $\cdot$ 0,
   - brak granicy $\cdot\ 0^+$,
   - brak granicy $\cdot$ nieskończoność,
   - brak granicy $\cdot$ brak granicy,
   - $(\text{brak granicy})^{\text{liczba}}$,
   - $(\text{brak granicy})^{\text{nieskoczonosc}}$,
   - $(\text{brak granicy})^{\text{brak granicy}}$.

6. (*) Korzystając z twierdzenia o średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

7. Niech $a > 1$ i $p > 0$. Korzystając z wyniku z poprzedniego zadania wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$.

   Następnie wywnioskować, że

(a) $\exists\, C > 0\ \forall n \in \mathbf{N}_+\ \ \log_a n \le Cn$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log_a n} = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n - p\log_a n) = \infty$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^p} = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0$.

8. Obliczyć granice poniższych ciągów.

(a) $\sqrt[n]{5 \cdot 2^n - 3^n + 7 \cdot 4^n}$.

(b) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{3}{\sqrt{n}}}$.

(c) $\sqrt[n]{W(n)}$, gdzie W jest wielomianem różnym od zerowego.

(d) $\sqrt[n]{n^{10} + 10^n}$.

(e) $\sqrt[n]{\ln(n^2 + n + 2) \cdot |x|^{2n+1}}$, gdzie x jest stałą różną od 0.

9. ($\star$) Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

6. Granice funkcji.

1.