1. Całki niewłaściwe.

1. Obliczyć poniższe całki.

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+3)}dx.$

   (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(\sqrt[3]{x}+2)^2}dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2^x}{4^x+1}dx.$

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 xe^{2x}dx.$

   (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{2x^3+x^2}dx.$

   (g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx.$

   (h) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx.$

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-|x+2|}dx.$

   (j) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3+1}{(x^4+4x+7)^2}dx.$

2. Obliczyć poniższe całki.

   (a) $\displaystyle\int_a^\infty A^x dx$ oraz $\displaystyle\int_{-\infty}^a A^x dx$ dla $a \in \mathbf{R}$ oraz $A > 0$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ dla $a \neq 0$, $b, c \in \mathbf{R}$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

   (c) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}dx$ dla $a, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ takich, że $x_1 < x_2 < a$.

(d) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x\ln^p x}dx$ dla $a,p>0$.

(e) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\ln x}{x^p}dx$ dla $a,p>0$.

3. Wzory typu "całka z sumy/różnicy = suma/różnica całek" (prawdziwe dla całek oznaczonych) nie muszą być prawdziwe dla całek niewłaściwych. Pokazać, że jeżeli $f(x)=\dfrac{1}{x}$ oraz $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ to

   $$\int_2^\infty (f(x)+g(x))dx = \int_2^\infty f(x)dx + \int_2^\infty g(x)dx$$

   ale już równość

   $$\int_2^\infty (f(x)-g(x))dx = \int_2^\infty f(x)dx - \int_2^\infty g(x)dx$$

   nie zachodzi.

4. Wykazać, że jeżeli całka $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ posiada wartość skończoną lub nieskończoną to zachodzi wzór

   $$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_{-a}^\infty f(-x)dx.$$

5. Wykazać, że jeżeli $F^{'}=f$ na $\mathbf{R}$ to zachodzi wzór

   $$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{T\to\infty} F(T) - \lim_{S\to-\infty} F(S),$$

   przy założeniu, że prawa strona wzoru jest określona.

   Wzór ten pozwala przyspieszyć i uprościć rachunki przy obliczaniu całek po całym $\mathbf{R}$.

6. Wykazać, że dla funkcji f całkowalnej na każdym przedziale typu $[a,T]$

   (a) jeżeli $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)>0$ to $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx=\infty$,

   (b) jeżeli $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)<0$ to $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx=-\infty$.

7. (*) Podać przykład funkcji elementarnych ciągłych na $[a,\infty)$ dla których $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje, a wartość całki $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$

   (a) jest skończona,

(b) jest nieskończona,

(c) nie istnieje.

8. Korzystając z odpowiedniego kryterium zbadać zbieżność poniższych całek.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^2+x+1}{x^4+x+1}dx.$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x^3+x+1}{x^4+x+1}dx.$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2^x-1}{5^x-1}dx.$

(d) $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{5\cdot 3^x+2^x+1}{4^x-2\cdot 3^x-7}dx.$

(e) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\sqrt[5]{x^6+x+2}}{\sqrt{2x^4-x^3+2}}dx.$

(f) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)dx.$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\sqrt{x^4+x+1}-x^2\right)dx.$

(h) $\displaystyle\int_1^\infty \left(1-\frac{2}{x}\right)^x dx.$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\ln(2x+1)-\ln x\right)dx.$

(j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{3x+5}}dx.$

(k) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{x^2+\cos x}{x^3+x^2\cdot\sqrt{x}}dx.$

(l) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{1+\cos x}{x+\sqrt{x}}dx.$

(m) ($\star$) $\displaystyle\int_\pi^\infty x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx.$

9. (kontynuacja poprzedniego zadania) Korzystając z odpowiedniego kryterium zbadać zbieżność poniższych całek.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \sqrt[3]{\sin \frac{1}{x^4}} dx.$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{3}{2^x}\right) dx.$

(e) $\displaystyle\int_1^\infty x^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{x^3} dx.$

(f) $\displaystyle\int_1^\infty 2^x \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{3^x} dx.$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

(h) $(\star)$ $\displaystyle\int_1^\infty \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right) dx.$

10. Pola i objętości obszarów nieograniczonych oraz ich skończoność.

(a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu i krzywą $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

(b) Obszar ograniczony osią X i wykresem krzywej $y = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ został obrócony wokół osi X i utworzył bryłę obrotową. Obliczyć jej objętość.

(c) Uzasadnić, że chociaż objętość bryły z b) jest skończona to obracany obszar ma pole nieskończone.

11. Uzasadnić, że poniższe całki są zbieżne bezwzględnie.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x\sqrt[3]{x}+2} dx.$

(b) $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty \frac{4\cos x - 3}{2^x - 1} dx.$

(c) $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2 + \cos(5x)} dx.$

(d) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{3^x \cos x}{2^x + 5^x} dx.$

12. (*) Wykazać, że dla dowolnego $A \neq 0$, $B \in \mathbf{R}$ i $a > 0$ całka $\displaystyle\int\limits_{a}^{\infty} \frac{\cos(Ax+B)}{x} dx$ jest zbieżna warunkowo.

13. Obliczyć wartości główne poniższych całek.

(a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + \sin(2x)}{x\sqrt[3]{x} + 2} dx.$

(b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx.$

(c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot |x+1| dx.$

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} (-x^2 + x + 1 + |x^2 - 1|) dx.$

(e) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx.$

14. Obliczyć poniższe całki niewłaściwe drugiego rodzaju.

(a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{64} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x} dx.$

(b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx.$

(c) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{2^x}{2^x - 4} dx.$

(d) $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{1}{2 - \sqrt{x}} dx.$

(e) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$

15. Istnieje wiele wzorów, które sprowadzają całki niewłaściwe drugiego rodzaju do całek niewłaściwych pierwszego rodzaju. Udowodnić poniższe dwa.

(a) Jeżeli f jest ciągła na przedziale $(a, b]$ to zachodzi wzór

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^\infty \frac{1}{t^2} f\left(a + \frac{1}{t}\right) dt, \text{ gdzie } c = \frac{1}{b-a}.$$

(b) Jeżeli f jest ciągła na przedziale $[a, b)$ to zachodzi wzór

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^\infty \frac{1}{t^2} f\left(b - \frac{1}{t}\right) dt, \text{ gdzie } c = \frac{1}{b-a}.$$

Krzysztof „El Profe” Michalik