2. Szeregi liczbowe.

1. Korzystając z postaci szeregów teleskopowych wyznaczyć dokładną wartość poniższych sum, maksymalnie upraszczając końcowy wynik.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\arccos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\arccos\left(\frac{1}{n+3}\right)\right)$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)\cdot\ln n}$.

2. (*) Rozpatrujemy liczby $x, y \in \mathbf{R}$ takie, że $xy \neq -1$.

   (a) Udowodnić, że jeżeli x i y mają te same znaki to zachodzi wzór
   $$\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y=\mathrm{arctg}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$
   oraz podać przykład takich x i y dla których wzór ten nie zachodzi.

   (b) Korzystając z powyższego wzoru wyznaczyć dokładną wartość sumy
   $$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{n^2}\right),$$
   maksymalnie upraszczając końcowy wynik.

3. Korzystając z odpowiedniego kryterium zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną poniższych szeregów.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+n-3}+\sqrt[3]{n^5}}{n^3+2}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n^2+n+3)^{30}+1}{n!}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n+n^2\cdot 3^n}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^n$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arccos\left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)\right)^n$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos(n^2)}{\sqrt[5]{n^3}}$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)}{(\ln 2)^n+(\ln 3)^n}$.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+200}$.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^3+200}$.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(\sqrt[3]{n+7}-\sqrt[3]{n})$.

(m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n)}{\sqrt{2^n-1}}$.

4. (kontynuacja poprzedniego zadania) Zbadać zbieżność poniższych szeregów.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\sin\frac{1}{n^2}}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}7^n\arcsin^2\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[4]{n}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\cdot\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$.

(d) (*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)$.

5. Korzystając ze znanego oszacowania dla logarytmu naturalnego:

$$\forall p>0\ \exists C>0\ \forall n>2\ \ 1\le\ln n\le Cn^p$$

zbadać zbieżność poniższych szeregów.

(a) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$.

(b) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n\cdot\sqrt[3]{n^4}}$.

(c) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{\ln n}}{n^2}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^q}$ dla $p, q > 0$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n \cdot n^q}$ dla $p, q > 0,\ q \neq 1$.

6. (Brakujący przypadek ostatniego przykładu z poprzedniego zadania.)

   Wykazać, że w przypadku szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n},\ p > 0,$$

   nie da się określić zbieżności korzystając z oszacowania w poprzednim zadaniu. Zbadać zbieżność tego szeregu inną metodą.

7. Niech $a > 1$ oraz $p \in \mathbf{R}$. Korzystając z analizy odpowiedniego szeregu wykazać, że ciągi $\frac{a^n}{n!}$ oraz $\frac{n^p}{a^n}$ dążą do 0.

   Wywnioskować stąd, że również $\frac{n^p}{n!}$ dąży do 0, a $\frac{n!}{a^n}$, $\frac{a^n}{n^p}$ i $\frac{n!}{n^p}$ dążą do ∞.

8. (*) Korzystając z kryterium Raabego (temat do samodzielnego zgłębienia) wykazać, że

   (a) szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! \cdot (2n+1)}$ jest zbieżny,

   (b) szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ jest rozbieżny,

   gdzie $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$ oraz $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)$.

   Wynik z (a) daje zbieżność szeregu potęgowego funkcji $\arcsin x$ dla $x = \pm 1$.

9. Wykazać, że szereg $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + 2 \cdot (-1)^n}{n}$ jest szeregiem naprzemiennym o wyrazie ogólnym dążącym do 0 ale suma tego szeregu jest nieskończona.

   Na tej podstawie uzasadnić, że wartość bezwzględna wyrazu ogólnego tego szeregu nie jest ciągiem monotonicznym.

10. (*) Udowodnić poniższe twierdzenie:

    jeżeli mamy szereg naprzemienny $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, i ciąg a_n jest niemalejący to suma $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ nie istnieje.

    Stąd wynika, że jeżeli mamy szereg naprzemienny dla którego kryterium d'Alemberta daje przypadek rozbieżności to suma tego szeregu nie istnieje.