3. Szeregi potęgowe.

1. Wyznaczyć wszystkie $x \in \mathbf{R}$ dla których poniższe szeregi są zbieżne (warto wpierw spojrzeć na zadanie 2).

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n} \cdot 2^n - 1}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2x+1)^n (2^n + 3^n)$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n+1}}{n^2 \cdot 4^n + n \cdot 3^n + 5}$.

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+2)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\dfrac{n^2+5}{\sqrt{n}+5}}$.

   (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+2)^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\dfrac{n^2+5}{\sqrt{n}+5}}$.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\ln(2n+1)}$.

   (j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^{n^5+n+1}$.

2. Wygodne twierdzenie, które pozwala przyspieszyć rachunki przy wyznaczaniu zbieżności szeregu potęgowego.

   (a) Uzasadnić, że jeżeli szereg potęgowy na jednym z końców przedziału zbieżności jest zbieżnym szeregiem o wyrazach nieujemnych to jest także zbieżny na drugim końcu przedziału zbieżności.

   (b) Podać przykłady, że jeżeli ten szereg na tym końcu przedziału zbieżności jest szeregiem o wyrazach nieujemnych ale rozbieżnym to na drugim drugim końcu przedziału zbieżności szereg ten może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny.

3. Korzystając z rozwinięć Maclaurina standardowych funkcji elementarnych znaleźć rozwinięcia Maclaurina poniższych funkcji. Wyznaczyć przedziały zbieżności tych rozwinięć.

   Wyniki podać w postaci maksymalnie uproszczonej

- z użyciem operacji sumowania $\sum$,
- w postaci rozwiniętej, obliczając trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia.

(a) $f(x) = xe^{2x} + \ln(1-x)$.

(b) $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin(3x)$.

(c) $f(x) = \ln(1+4x^2)$.

(d) $f(x) = \ln(4-x^2)$.

(e) $f(x) = \operatorname{arctg}(5x^3)$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$.

(g) $f(x) = \dfrac{x}{8-x^3}$.

(h) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^3}$.

4. Korzystając z rozkładu na ułamki proste i z rozwinięcia Maclaurina odpowiedniej funkcji elementarnej wyznaczyć szeregi Maclaurina poniższych funkcji.

(a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-3x+2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^3+x^2+4x+4}$.

5. Korzystając z popularnych szeregów Maclaurina obliczyć sumy poniższych szeregów.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{2^{4n}(2n)!}$.

6. Pokazać, że dla $x \in (-1,1)$ mamy wzór

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n.$$

7. (a) Korzystając z techniki różniczkowania/całkowania odpowiedniego szeregu potęgowego znaleźć sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2},\ x \in (-1,1)$.

   (b) Wyprowadzić uzyskany wzór jeszcze raz, bezpośrednio korzystając z rozwinięcia dla funkcji $(1+x)^p$ z odpowiednio dobranym p.

8. Wyznaczyć wartość poniższych sum poprzez wyznaczenie sumy odpowiedniego szeregu potęgowego.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$.

9. Wyznaczyć szeregi Maclaurina całek nieoznaczonych $F(x) = \int f(x)dx$ z poniższych funkcji f.

   (a) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

   (b) $f(x) = x\cos(x^3)$.

   (c) $f(x) = \ln(1-x^{12})$, $x \in (-1,1)$.

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^7}$, $x \in (-1,1)$.

10. Znaleźć szeregi liczbowe, których sumy są równe poniższym całkom oznaczonym.

   (a) $f(x) = \int_1^2 e^{x^3}dx$.

   (b) $f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\sin(x^2)dx$.

   (c) $f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{1+x^4}dx$.

11. Korzystając z twierdzenia Abela o zbieżności szeregu potęgowych na końcach przedziału zbieżności uzasadnić zbieżność szeregów potęgowych dla poniższych funkcji.

   (a) $\ln(1+x)$ dla $x=1$.

   (b) arctg$x)$ dla $x=\pm 1$.

(c) (*) $\sqrt{1+x}$ dla $x = \pm 1$.

Krzysztof „El Profe" Michalik