4. Funkcje wielu zmiennych.

1. Dla poniższych zbiorów wyznaczyć ich wnętrze, zewnętrze i brzeg, a następne zbadać czy są one

   - otwarte,
   - domknięte,
   - brzegowe,
   - spójne,
   - ograniczone,
   - obszarami otwartymi lub domkniętymi.

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ 1 < (x-1)^2 + (y+5)^2 \leq 2\}$.

   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ |x| \geq 2,\ |y| \leq 4\}$.

   (d) $D = \left\{x \in \mathbf{R} :\ \frac{1}{x} < 5\right\}$.

   (e) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ x = \frac{1}{n}, y = \frac{2}{n}, z = \frac{3}{n},\ n \in \mathbf{N}_+\right\}$.

   (f) Zbiór liczb wymiernych.

2. Zidentyfikować i narysować powierzchnie dane poniższymi równaniami. Tam, gdzie to możliwe podać formalną nazwę powierzchni i jej parametry, w pozostałych przypadkach podać sposób konstrukcji.

   (a) $f(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2 + 2x}$.

   (b) $f(x, y) = 2 - \sqrt{-3 - x^2 - y^2 - 4y}$.

   (c) $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$.

   (d) $f(x, y) = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10}$.

   (e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

   (f) $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 2x)^2$.

   (g) $f(x, y) = 2x^2 - 3x + 1$.

   (h) $f(x, y) = \frac{2}{y}$.

3. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne poniższych funkcji.

   (a) $f(x, y) = \sqrt{xy - 2y}$.

   (b) $f(x, y) = \frac{1}{x + y - 2} + \ln(2 - x^2)$.

   (c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt[4]{x^2 + y^2 + 4x}}$.

   (d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4z^2}$.

(e) $f(x,y,z) = \arccos(x^2+y^2+z^2+2z)$.

(f) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x} \cdot \dfrac{1}{y+3} \cdot \dfrac{1}{1-e^z}$.

4. Obliczyć poniższe granice.

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 5\\ y\to 4\\ z\to 1}} (2x-3y+2z)\sin\left(\frac{1}{x-y-z}\right)$.

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} (x^3+y^3)\left\lfloor\frac{\pi}{x+y}\right\rfloor$.

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x+y)}{\sqrt[5]{x+y+1}-1}$.

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2\\ z\to 0}} \frac{e^{x-y+z}+e^{y-x-z}-2}{(x-y+z)^2}$.

(e) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}} \frac{2^x\cdot 4^y-\cos(x+2y)}{x+2y}$.

5. Wykazać brak istnienia poniższych granic.

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} e^{\frac{1}{x-y-z}}$.

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x+y-3}{x^2+y-3}$.

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 1}} (x+y-2z)\ln\left(\,(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\,\right)$.

6. Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości poniższych funkcji.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x+y\geq 0,\\ 3x-5y+1, & x+y<0.\end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \le 1, \\ \sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 1. \end{cases}$

(c) $f(x,y,z) = \operatorname{sgn}(x^2+y^4+(z+1)^6)$.

(d) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x+y+z}{x+y+2z}, & x+y+2z \ne 0, \\ 1, & x+y+2z = 0. \end{cases}$

7. Dobrać parametr a tak, by funkcja f była ciągła na swojej dziedzinie.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x+y-1, & y \ge x+1, \\ ax-2y+2, & y < x+1. \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} (x+ay)\ln(x+y), & x+y > 0, \\ 0, & x+y \le 0. \end{cases}$

(c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x+y+az}{x+y+2z}, & x+y+2z \ne 0, \\ 1, & x+y+2z = 0. \end{cases}$

Krzysztof „El Profe” Michalik