5. Pochodne i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych.

1. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu poniższych funkcji i sprawdzić prawdziwość twierdzenia Schwarza.

   (a) $f(x, y) = (2x + y^2 + 3)^7$.

   (b) $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

   (c) $f(x, y) = x \ln(xy^2 + y + 1)$.

   (d) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^4 + y^4 + z^4}$.

   (e) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{y}} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{z}} + \dfrac{z}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Korzystając z twierdzenia Schwarza obliczyć wszystkie

   (a) pochodne cząstkowe trzeciego rzędu funkcji $f(x, y) = \cos(xy^2)$,

   (b) pochodne cząstkowe trzeciego rzędu funkcji $f(x, y, z) = x^2 \cdot \sqrt[4]{y} \cdot z$,

   (c) pochodne cząstkowe czwartego rzędu funkcji $f(x, y) = \dfrac{y^3}{x^2}$,

   (d) pochodne cząstkowe n-tego rzędu funkcji $f(x, y) = e^{2x-y}$.

3. Sprawdzić, że

   (a) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2)$ spełnia równanie $f_{xx} + f_{yy} = 0$,

   (b) $f(x, y, z) = \sqrt[3]{(2 + \sin(x - z)) \cdot (y - 2z)^4}$ spełnia równanie $f_x + 2f_y + f_z = 0$.

4. Dana jest funkcja $f(x, y) = \ln(2y + 8 - x^2 - y^2)$. Narysować zbiór wszystkich punktów (x, y) dla których $f_{xy}(x, y) \leq 0$.

5. (*) Policzyliśmy wszystkie pochodne cząstkowe rzędu n funkcji k zmiennych na ustalonym otwartym podzbiorze dziedziny. Ile maksymalnie różnych wzorów możemy otrzymać jeżeli na tym zbiorze wszystkie te pochodne są funkcjami ciągłymi?

6. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

   (a) $f(x, y) = \mathrm{tg}(x + 2y)$ w punkcie $(0, 0, f(0, 0))$,

   (b) $f(x, y) = \mathrm{arctg}(x^2 - y)$ w punkcie jego przecięcia z osią Y,

   (c) $f(x, y) = (2x + y - 1)^5$ w punkcie jego przecięcia z prostą

   $$L : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}, \; t \in \mathbf{R},$$

   (d) $f(x, y) = (x + 3y + 1)^4 + (x - y)^2$ w punkcie wspólnym z płaszczyzną XY.

   Uzasadnić, że te płaszczyzny są rzeczywiście płaszczyznami stycznymi poprzez zbadanie różniczkowalności tych funkcji w odpowiednich punktach.

7. Dana jest powierzchnia określona równaniem $z = \sqrt{2x - y^2}$. Wyznaczyć wszystkie punkty tej powierzchni w których płaszczyzna styczna

   (a) jest prostopadła do prostej $L : \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$,

   (b) jest równoległa do płaszczyzny $\Pi : -2x + 3z + 1 = 0$,

   (c) jest równoległa do płaszczyzny $\Pi : x + 2y + 3z = 0$,

8. (*) Wykresem funkcji $f = f(x, y)$ jest powierzchnia obrotowa wokół osi Z. Zakładamy, że pewne otoczenie punktu $P = (0, 0)$ zawiera się w dziedzinie f.

   (a) Wykazać, że w P albo istnieją obie pochodne f_x, f_y istnieją albo żadna z nich. W pierwszym z tych przypadków wyznaczyć wartości tych pochodnych w P.

   (b) Wykazać, że istnienie $f_x(P)$ gwarantuje różniczkowalność f w punkcie P i znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu f w P.

9. Dla funkcji $f(x, y) = |x| \cdot |y|$ i $\vec{v} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$ obliczyć bezpośrednio z definicji $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 2)$.

10. Obliczyć pochodne kierunkowe danych funkcji f w danych punktach P i w zadanych kierunkach $\vec{v}$.

    (a) $f(x, y) = x^{xy}$, $P = (2, 1)$, $\vec{v} = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$.

    (b) $f(x, y) = \sin(2\pi \cos(x \mathrm{tg} y)))$, $P = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{v} = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$.

    (c) $f(x, y, z) = (y + 2z)^x$, $P = (2, 2, 0)$, $\vec{v} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

11. Dana jest funkcja $f(x, y) = \frac{3x + y}{x^2 + 1}$ oraz punkt $P = (1, 1)$.

    (a) Wyznaczyć wszystkie wersory $\vec{v}$ dla których $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P)$ osiąga największą wartość.
    Obliczyć tą wartość.

    (b) Wyznaczyć wszystkie wersory $\vec{v}$ dla których $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P)$ osiąga najmniejszą wartość.
    Obliczyć tą wartość.

    (c) Wyznaczyć wszystkie wersory $\vec{v}$ dla których $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = 0$.

    (d) Dla $\vec{v} = \left[\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right]$ wyznaczyć i narysować zbiór wszystkich punktów (x, y) w których $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = 0$.

Krzysztof „El Profe” Michalik