6. Zastosowania rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.

1. Korzystając ze wzoru na przybliżenie funkcji przez jej płaszczyznę styczną obliczyć przybliżone wartości poniższych wyrażeń. Porównać z dokładnymi wartościami i obliczyć błędy względne tych przybliżeń.

   (a) $\sin(0.1) \cdot \ln(0.95)$.

   (b) $\sqrt{1.03^2 + 2.02^2 + 1.95^2}$.

2. Zastosować wzór na przybliżenie funkcji przez jej różniczkę styczną do obliczenia, w przybliżeniu, poniższych dokładności.

   (a) W celu obliczenia średniej gęstości obiektu zmierzono jego masę i objętość. Otrzymano wyniki $530\text{g} \pm 1\text{g}$ oraz $13\text{cm}^3 \pm 1\text{cm}^3$. Z jaką dokładnością można obliczyć gęstość tego obiektu?

   (b) Zmierzono dwa boki trójkąta i miarę kąta między nimi. Otrzymano wyniki $18\text{mm} \pm 1\text{mm}$, $7\text{mm} \pm 1\text{mm}$ oraz $30^\circ \pm 1^\circ$. Z jaką dokładnością można obliczyć pole tego trójkąta?

   (c) Każdą z n liczb można wyznaczyć z dokładnością $\delta > 0$. Z jaką dokładnością można obliczyć średnią arytmetyczną tych liczb?

   (d) Każdą z n liczb dodatnich można wyznaczyć z dokładnością $\delta > 0$. Z jaką dokładnością można obliczyć średnią geometryczną tych liczb?

3. Wykazać wprost z definicji, że podane funkcje mają ekstrema lokalne w zadanych punktach. Zbadać, które z nich są globalne.

   (a) $f(x, y) = -2(x-3)^6 + \dfrac{1}{1+|y+1|}$ w $P = (3, -1)$.

   (b) $g(x, y, z) = x^2 + \cos y + \sqrt[3]{z^2}$ w $P = (\pi, 0, 0)$.

   (c) $h(x, y) = x^4 - x^5 + y^2 + 2y$ w $P = (0, -1)$.

4. Zapisać formalnie, używając operacji logicznych, warunek, że funkcja n zmiennych nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $P \in \mathbf{R}^n$.

   Następnie udowodnić, że poniższe funkcje nie mają ekstremów w podanych punktach.

   (a) $f(x, y) = 2(x-3)^6 + \dfrac{1}{1+|y+1|}$ w $P = (3, -1)$,

   (b) $g(x, y, z) = x^2 + \cos y + \sqrt[3]{z^2}$ w $P = (0, 0, 0)$.

5. Wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne poniższych funkcji.

   (a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 5y^2 + 4x - 7y + 2$.

   (b) $f(x, y) = (y - 4x^2) \cdot (1 - y)$.

   (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-2y}$.

   (d) $f(x, y) = \dfrac{1-y}{\sqrt{x}} - \dfrac{x}{y}$.

   (e) $f(x, y) = \dfrac{4}{y} + \dfrac{y}{x} - x^2$.

(f) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + y - \ln y$.

6. (*) Definiujemy wielomian drugiego stopnia dwóch zmiennych jako
$W(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$,
gdzie $a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0 \vee c \neq 0$.
Zdefiniujmy substytut delty analogicznym wzorem jak dla jednej zmiennej, tzn. $\Delta = b^2 - 4ac$.
Zbadać co dla ekstremów W oznacza warunek $\Delta > 0$, a co $\Delta < 0$.

7. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji spełniającej dane warunki.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y+7}$, $x + \sqrt{y} = 0$.

   (b) $f(x,y) = xy + y$, $y = \sqrt{1-x^2}$.

   (c) $f(x,y) = y - \ln x$, $y = x^4$.

8. Wyznaczyć największe i najmniejsze wartości podanych funkcji na zadanych zbiorach D.

   (a) $f(x,y) = 2x^3 + 3y^4$, $D = \{(x,y):\ x^4 + y^4 \leq 1\}$.

   (b) $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$.

   (c) $f(x,y) = x^2 e^{-y^2}$, D jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,2)$ oraz $(2,2)$.

   (d) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^x$, D to kwadrat $[-1,1] \times [-1,1]$.

   (e) $f(x,y) = x^2 y$, D to trapez o wierzchołkach $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$ oraz $(1,0)$.

9. (a) Wśród prostopadłościanów zawartych w kuli o promieniu 1 wyznaczyć wymiary tego, który ma największą możliwą objętość.

   (b) Kawałek prostokątnej blachy o długości 5m i szerokości 30cm wyginamy wzdłuż dwóch prostych równoległych do dłuższego boku tak, by otrzymać rynnę o długości 5m, której przekrojem jest trapez równoramienny. Jaki powinien być kształt tej rynny aby zmieściła maksymalnie dużą ilość wody?

   (c) (*) Znaleźć najkrótszą odległość między parabolami $y = x^2$ oraz $y = 3x^2 + 1$.

Krzysztof „El Profe” Michalik