7. Całki podwójne.

1. Obliczyć całki podwójne z podanych funkcji f na zadanych prostokątach.

   (a) $f(x,y) = xye^{2xy^2}$, $D = [0,2] \times [1,2]$.

   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{(2x-y)^3} + \dfrac{1}{2x-y}$, $D = [1,2] \times [-1,0]$.

   (c) $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-t^2)^3}}$, $D = \left\{(x,t) : 0 \le x \le 4,\ 0 \le t \le \dfrac{1}{2}\right\}$.

   (d) $f(r,\varphi) = r(r^2\cos^2\varphi + r\sin(2\varphi) + \mathrm{tg}\varphi)$, $D = \left\{(r,\varphi) : 1 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

2. Niech g będzie funkcją całkowalną na $[a,b]$, a h - funkcją całkowalną na $[c,d]$. Wykazać, że jeżeli funkcja $f = f(x,y)$ rozkłada się na iloczyn dwóch całkowalnych funkcji jednej zmiennej, tzn. $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, to na prostokącie $D = [a,b] \times [c,d]$ całka z f rozkłada się na iloczyn pojedynczych całek, tzn.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b g(x)dx \cdot \int\limits_c^d h(y)dy.$$

   Wykorzystać ten wzór do obliczenia całki $\iint\limits_D e^{x^2+y^3}\sin x dxdy$ na $D = [-\pi,\pi] \times [1,2]$.

3. Na zbiorach D ograniczonych podanymi krzywymi zapisać całkę $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ w postaci całki iterowanej lub sumy całek iterowanych.

   Zastosować obie kolejności całkowania i podać oba wyniki.

   (a) $y = \dfrac{1}{2}(x+1)$, $x = 1$, $y = 2$.

   (b) $y = \sqrt{6-x^2}$, $y = x^2$.

   (c) $y = \sqrt{x^2-4}$, $y = 0$, $y = 1$.

   (d) $y = 2x-1$, $y = -5-x$, $y = 2$.

4. Obliczyć całki z poniższych funkcji po zadanych zbiorach.

   (a) $f(x,y) = xy^{10}$, D jest ograniczony wykresami krzywych $y = x$ i $y = 2-x^2$.

   (b) $f(x,y) = 2^{x^3}y$, D jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,-1)$ i $(1,0)$.

   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y^2}}$, $D = \left\{(x,y) : \dfrac{1}{4} \le x \le 2,\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}x} \le y \le 1\right\}$.

   (d) $f(x,y) = x+2y$, D jest ograniczony wykresami krzywych $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $y = \cos(2x)$ i $y = -2$.

   (e) $f(x,y) = \dfrac{x}{(xy+3)^2}$, D jest ograniczony osią X oraz wykresami prostych $x = 3$ i $y = x$.

   (f) $f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$, $D = \left\{(x,y) : 1 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$.

5. Korzystając ze współrzędnych biegunowych obliczyć całki z poniższych funkcji po zadanych zbiorach.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^4}$, $D = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 3,\ 0 \le y \le -x\}$.

   (b) $f(x,y) = \dfrac{3}{y}$, $D = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 2y\}$.

   (c) $f(x,y) = y$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2x,\ 0 \le y \le x\}$.

   (d) $f(x,y) = x^4 + y^4$, D jest ograniczony wykresami krzywych $y = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$ i $y = \sqrt{4 - x^2}$.

   (e) $f(x,y) = 3x + 2y$, D jest ograniczony wykresami krzywych $y = 3 + \sqrt{11 - 4x - x^2}$, $x = -2$ oraz $y = x + 5$.

   (f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $D = \left\{(x,y) : 1 \le y \le \sqrt{2 - x^2}\right\}$.

6. Obrazem zbioru $D \subset \mathbf{R}^2$ we współrzędnych biegunowych jest prostokąt. Jakim zbiorem we współrzędnych kartezjańskich może być D? Podać jego kształt, położenie i parametry.

Krzysztof „El Profe” Michalik