8. Zastosowania całek podwójnych.

1. (a) Korzystając z całki podwójnej obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \frac{1}{2}|x|$ oraz $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$.

   (b) Obliczyć to pole korzystając bezpośrednio z geometrii, ze wzorów na pola odpowiednich figur.

2. Obliczyć objętości brył U opisanych poniższymi warunkami.

   (a) $U = \left\{(x, y, z) : 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le x,\ -x \le z \le 1 + xe^{2y}\right\}$.

   (b) $U = \left\{(x, y, z) : 0 \le 2y \le x \le \sqrt{1 - y^2},\ 0 \le z \le \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}\right\}$.

   (c) U jest ograniczona powierzchniami o równaniach $x^2 + y^2 = 2Rx$, $z = 0$ oraz $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, gdzie $R, a > 0$.

3. Wycinek kuli o promieniu R i kącie rozwarcia α to bryła, która powstaje w wyniku obrotu wycinka kątowego o powyższych parametrach wokół jego osi symetrii. Korzystając z całki podwójnej wykazać, że objętość tej bryły dana jest wzorem $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

   Wyznaczyć kąt dla którego objętość ta jest połową objętości półkuli o promieniu R.

4. Obliczyć pola powierzchni poniższych wykresów funkcji dwóch zmiennych na zadanych dziedzinach.

   (a) $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, gdzie $D_f = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4x\right\}$.

   (b) $f(x, y) = Ax + By + C$, gdzie D_f jest dowolnym obszarem normalnym o polu S.

   (c) $f(x, y) = a\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, gdzie D_f jest dowolnym obszarem normalnym o polu S.

5. Korzystając z całki podwójnej obliczyć, w przybliżeniu, powierzchnię całego fragmentu Arktyki, który leży poza kołem podbiegunowym północnym. Przyjąć, że Ziemia jest kulą o promieniu 6370km, a koło podbiegunowe ma szerokość geograficzną $66°40'$N.

   Wynik podać w km^2, z dokładnością do 3 cyfr znaczących.

6. Wyznaczyć współrzędne środków masy obszarów jednorodnych opisanych poniższymi warunkami.

   (a) Zbiór ograniczony osiami układu oraz wykresem krzywej $y = 2 - e^x$.

   (b) Zbiór ograniczony wykresami krzywych $y = x^2$ oraz $y = \sqrt{x}$.

   (c) Zbiór ograniczony osią X oraz wykresem krzywej $y = a - x^p$, gdzie $a, p > 0$.

7. Dany jest wycinek kątowy o promieniu R i kącie wewnętrznym α. Osią symetrii tej figury jest oś Y, a wierzchołek leży w początku układu współrzędnych. Wyznaczyć współrzędne środka masy wycinka, a następnie znaleźć graniczne położenie tego punktu przy $\alpha \to (2\pi)^-$ oraz przy $\alpha \to 0^+$. Skomentować uzyskane wyniki.

8. D jest zbiorem jednorodnym, który może być przedstawiony w postaci $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$, gdzie zbiory D_1, D_2,...,D_n są obszarami normalnymi takimi, że ich wnętrza są parami rozłączne (czyli mogą się stykać tylko brzegiem). Dla $i = 1, 2, ..., n$ niech $S_i = (x_i, y_i)$ oznacza środek masy D_i.

Korzystając ze wzoru całkowego na współrzędne środka masy wykazać, że środkiem masy zbioru D jest punkt $S = (x_c, y_c)$, którego współrzędne są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych punktów S_i, a wagami są pola zbiorów D_i. Ściśle mówiąc, zachodzą wzory

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{|D_i|}{|D|} x_i = \frac{|D_1|}{|D|} x_1 + \frac{|D_2|}{|D|} x_2 + ... + \frac{|D_n|}{|D|} x_n,$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{|D_i|}{|D|} y_i = \frac{|D_1|}{|D|} y_1 + \frac{|D_2|}{|D|} y_2 + ... + \frac{|D_n|}{|D|} y_n.$$

W wersji wektorowej mamy jedną równość:

$$\overrightarrow{OS} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|D_i|}{|D|} \cdot \overrightarrow{OD_i} = \frac{|D_1|}{|D|} \cdot \overrightarrow{OD_1} + \frac{|D_2|}{|D|} \cdot \overrightarrow{OD_2} + ... + \frac{|D_n|}{|D|} \cdot \overrightarrow{OD_n}.$$

9. Korzystając ze wzoru z poprzedniego zadania (czyli bez użycia całek) oraz ze współrzędnych środków masy popularnych figur wyznaczyć położenie środków masy poniższych zbiorów jednorodnych.

   (a) Suma dwóch kół o promieniach R_1 i R_2 takich, że odległość d między ich środkami wynosi przynajmniej $R_1 + R_2$.

   (b) Suma trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej a i półkola o średnicy a tak, że częścią wspólną obu figur jest przyprostokątna.

   (c) Suma kwadratu o boku a i trójkąta równobocznego o boku a tak, że częścią wspólną obu figur jest bok kwadratu.

   (d) Kwadrat o boku a, z którego wycięto zawarte w nim półkole o średnicy a.

10. Wyznaczyć momenty bezwładności podanych figur jednorodnych o masie M.

   (a) Kwadrat o boku a, względem jednego z boków.

   (b) Kwadrat o boku a, względem prostej łączącej środki przeciwległych boków.

   (c) Kwadrat o boku a, względem przekątnej.

   (d) Koło o promieniu R, względem średnicy.

   (e) Koło o promieniu R, względem prostej stycznej do brzegu.

   (f) Wycinek kątowy o promieniu R i kącie wewnętrznym α, względem osi symetrii.

   (g) Wycinek kątowy o promieniu R i kącie wewnętrznym α, względem wierzchołka.

   (h) Trójkąt równoboczny o boku a, względem jednego z boków.

   (i) Trójkąt równoboczny o boku a, względem jednej z wysokości.

Krzysztof „El Profe” Michalik