9. Transformata Laplace'a i równania różniczkowe.

1. Korzystając bezpośrednio z definicji wyznaczyć transformaty Laplace'a poniższych funkcji oraz dziedziny tych transformat (w przestrzeni rzeczywistej).

   (a) $f(t) = C \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} C, & t \in [a,b], \\ 0, & t \notin [a,b], \end{cases}$ gdzie $0 \leq a < b$ oraz $C \neq 0$.

   (b) $f(t) = \cos(\beta t)$, $\beta \neq 0$.

   (c) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,a), \\ 2a - t, & t \notin [a, 2a], \\ 0, & t > a, \end{cases}$ gdzie $a > 0$.

   (d) $f(t) = \mathbf{1}_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A, \end{cases}$

   gdzie $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} [2n, 2n+1] = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup ... = \{t : \exists n \in \mathbf{N} \;\; t \in [2n, 2n+1]\}$.

2. Korzystając z własności transformaty Laplace'a oraz podstawowych wzorów (czyli bez całkowania) wyznaczyć wzory transformat poniższych funkcji.

   (a) $f(t) = 2t^7 - 5t^4 + 7t^2 - 4 + t^3 \cdot e^{3t}$.

   (b) $f(t) = -5(t-2)^3 + 2^t$.

   (c) $f(t) = 5\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

   (d) $f(t) = te^{-t}\cos(3t)$.

   (e) $f(t) = \begin{cases} (t-3)^4 \cdot e^{2(t-3)}, & t \geq 3, \\ 0, & t < 3. \end{cases}$

3. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a są dane poniższymi wzorami.

   (a) $\dfrac{1}{s-3} + \dfrac{5}{s^3} + \dfrac{2}{s^2+7} - \dfrac{s}{s^2+7}$.

   (b) $\dfrac{3s+2}{s^2-s-2}$.

   (c) $\dfrac{s^2+5}{s^3-3s+2}$.

   (d) $\dfrac{s}{s^2-6s+34}$.

   (e) $\dfrac{As+B}{(s-p)^2+q^2}$, gdzie $q > 0$ oraz $A \neq 0 \vee B \neq 0$.

   (f) $\dfrac{e^{-2s}}{(s-2)^2}$.

   (g) $\dfrac{e^{-s}}{s^2+2s+2}$.

4. Korzystając z transformaty Laplace'a rozwiązać poniższe równania różniczkowe zmiennej $y = y(t)$.

(a) $y' + y = t^2 e^{-t},\ y(0) = 1.$

(b) $y' + y = 4\sin t,\ y(0) = -1.$

(c) $y' + y = 4\sin t,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

(d) $y' - \alpha y = k$, gdzie $\alpha, k \in \mathbf{R}$.

(e) $y' - \alpha y = k,\ y(t_0) = y_0$, gdzie $\alpha, k, t_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

(f) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -1.$

(g) $y'' - 2py' + p^2 y = 0,\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$, gdzie $p, t_0, y_0, y_1 \in \mathbf{R}$.

(h) $y'' + 4y = t,\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

(i) $y'' - 4y = t,\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

(j) $y'' - y = te^{2t},\ y(0) = y'(0) = 1.$

(k) $y'' - y = te^{t},\ y(0) = y'(0) = 1.$

(l) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2t),\ y(0) = y'(0) = 0.$

(m) $y'' + 2y' + 2y = \cos t,\ y(0) = y'(0) = 0.$

(n) $y'' - 2y' + y = e^{t},\ y(0) = 2, y'(0) = 0.$

5. Rozwiązać poniższe równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych.

(a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t\sin t}{e^y}.$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+1},\ x > -1.$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{9 - y^2}.$

(d) $\dfrac{ds}{dt} - s^2 = 4.$

(e) $\dfrac{dv}{dt} = te^{v - t^2},\ y(0) = 0.$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{(y-7)^4},\ y(0) = 0.$

(g) $\dfrac{dN}{dt} = N^3,\ N(0) = -\dfrac{1}{2}.$

(h) $\dfrac{dp}{dt} = 2^p,\ p(1) = 0.$

6. (Model swobodnego spadania z uwzględnieniem oporów powietrza).

Kropla deszczu spada z rosnącą prędkością, po linii prostej, w ziemskim polu grawitacyjnym, z uwzględnieniem oporu powietrza. Badania wykazują, że dla kropli o dużych rozmiarach wartość siły wynikającej z oporu powietrza jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości kropli w czasie (inaczej niż dla małych kropli, gdzie ta siła jest proporcjonalna do samej prędkości).

Wykazać, że prędkość $v = v(t)$ takiej kropli spełnia równanie $v' + kv^2 = g$, gdzie $k > 0$, a g jest przyspieszeniem ziemskim. Następnie wyznaczyć graniczną prędkość kropli.

Krzysztof „El Profe" Michalik