Wektory własne i wartości własne

1. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Zbadać bezpośrednio z definicji które z poniższych wektorów są wektorami własnymi macierzy A. Znaleźć odpowiadające im wartości własne.

   - $\vec{v}_1 = [2, 2, -1]$,
   - $\vec{v}_2 = [1, 1, 0]$,
   - $\vec{v}_3 = [1, 1, 1]$,
   - $\vec{v}_4 = [1, 0, 1]$.

2. Dla danej macierzy rzeczywistej niech W_λ oznacza zbiór jej wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda \in \mathbf{R}$. Udowodnić z definicji, że gdy $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W_\lambda$ to $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W_\lambda$ oraz $c\vec{v}_1 \in W_\lambda$ dla dowolnego $c \neq 0$.

   To oznacza, że zbiór $W_\lambda \cup \{\vec{0}\}$ jest przestrzenią liniową.

3. Niech A i B będą macierzami kwadratowymi tych samych wymiarów. Załóżmy, że $\vec{v}$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej λ i jest jednocześnie wektorem własnym B odpowiadającym wartości własnej λ'.

   Udowodnić z definicji, że

   (a) $\vec{v}$ jest wektorem własnym $A + B$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda + \lambda'$,

   (b) dla dowolnego $c \in \mathbf{R}$ $\vec{v}$ jest wektorem własnym cA odpowiadającym wartości własnej $c\lambda$,

   (c) $\vec{v}$ jest wektorem własnym AB oraz BA i odpowiada wartości własnej $\lambda\lambda'$.
   Dla $k \in \mathbf{N}^+$ wywnioskować stąd, że $\vec{v}$ jest wektorem własnym A^k i znaleźć odpowiadającą wartość własną.

4. (*) Udowodnić przez indukcję, że dla macierzy kwadratowej A wymianu n funkcja

   $W(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ jest wielomianem stopnia n zmiennej λ.

5. Wyznaczyć rzeczywiste wartości własne i wektory własne poniższych macierzy.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

   (b) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

   (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (d) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (macierz definiująca ciąg Fibonacciego).

   (e) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 - x^2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, gdzie $x > 0$.

   (f) $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (macierz obrotu o kąt α wokół $(0, 0)$).

(g) $S = \begin{bmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$ (macierz symetrii względem prostej $y = ax$).

(h) $P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & \dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$ (macierz rzutu na prostą $y = ax$).

(i) $E = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(j) $G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(k) $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. (*) Znaleźć zespolone wartości własne i wektory własne poniższych macierzy.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Znaleźć wszystkie macierze rzeczywiste A spełniające poniższe warunki.

(a) $[-1, 1]$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 2$, a $[-1, 2]$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.

(b) $[2, 5]$ oraz $[1, 0]$ są wektorami własnymi A odpowiadającymi wartości własnej $\lambda = -3$.

(c) (*) $[1, 1]$ jest wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 1$ i jest to jedyna wartość własna tej macierzy.

8. Niech A będzie rzeczywistą macierzą o wymiarach 2×2 której wielomian charakterystyczny ma pierwiastek podwójny. Udowodnij, że wtedy możliwe są dwa przypadki.

(a) A ma postać cI, $c \in \mathbf{R}$, a wtedy każdy niezerowy wektor jest wektorem własnym A.

(b) $A \neq cI$, a wtedy wszystkie wektory własne A to wektory kierunkowe pewnej prostej przechodzącej przez początek układu.

9. (*) Znaleźć wszystkie macierze kwadratowe wymiaru n dla których każdy niezerowy wektor z $\mathbf{R^n}$ jest wektorem własnym.

10. Korzystając z wektorów własnych i wartości własnych oraz procedury diagonalizacji znaleźć wzór na A^k, $k \in \mathbf{N}^+$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-x^2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, gdzie $x > 0$.

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

11. (*) Korzystając z wektorów własnych i wartości własnych znaleźć wzór na A^k, $k \in \mathbf{N}^+$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Jest to rozszerzenie poprzedniego zadania - wyznaczanie A^k, gdy bezpośrednia diagonalizacja nie jest możliwa. Opis jednej z możliwych metod znajduje się na następnej stronie.

Opis metody do ostatniego zadania.

Wstęp.

Gdy wielomian charakterystyczny A ma pierwiastki wielokrotne to procedura diagonalizacji nie zawsze jest możliwa. Można jednak w niektórych przypadkach znaleźć A^k poprzez odpowiednie przejście graniczne.

Definicje granic macierzowych

Mając macierz F o elementach zależnych od jednej zmiennej, np. x, możemy zdefiniować jej granicę G jako macierz granic elementów macierzy F. Czyli dla F i G o tych samych wymiarach i takich, że $F = F(x) = [f_{ij}(x)]$ oraz $G = [g_{ij}]$ mamy

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = G \Leftrightarrow \forall i, j \lim_{x\to x_0} f_{ij}(x) = g_{ij} \in \mathbf{R}.$$

Analogicznie definiujemy granice jednostronne dla $x \to x_0^+$ oraz $x \to x_0^-$.

Na przykład $\lim\limits_{x\to 1} \begin{bmatrix} 1+x & 2+x & 3+x \\ 4+x & 5+x & 6+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \begin{bmatrix} 1+x^2 & \sqrt{x} \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ itd.

Arytmetyka granic macierzowych

Arytmetyka granic macierzowych jest analogiczna jak w przypadku funkcji i wynika wprost ze standardowej arytmetyki granic skończonych. Gdy $A = A(x)$ i $B = B(x)$ to

$\lim\limits_{x\to x_0} (A \pm B) = \lim\limits_{x\to x_0} A \pm \lim\limits_{x\to x_0} B$, $\lim\limits_{x\to x_0} (cA) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} A$, $c \in \mathbf{R}$,

$\lim\limits_{x\to x_0} (A \cdot B) = \lim\limits_{x\to x_0} A \cdot \lim\limits_{x\to x_0} B$, $\lim\limits_{x\to x_0} A^k = \left(\lim\limits_{x\to x_0} A\right)^k$, $k \in \mathbf{N}^+$,

gdy granice po prawych stronach równości istnieją. Analogicznie mamy dla granic jednostronnych.

Wyznaczanie potęgi macierzy kwadratowej A

- Znaleźć macierz $B = B(x)$ taką, że $\lim\limits_{x\to x_0^+} B(x) = A$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} B(x) = A$.

  Ponadto wielomian charakterystyczny B ma mieć pierwiastki jednokrotne (będą zależeć od x). Zwykle by stworzyć B wystarczy wymienić jeden element macierzy A na jakieś wyrażenie z x. Dla macierzy trójkątnej wystarczy zmienić przekątną.

  Na przykład dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ możemy wziąć $B(x) = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ może być $B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ lub np. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1-x^2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (zobacz przykład z poprzedniego zadania).
- Obliczyć B^k poprzez procedurę diagonalizacji.
- Obliczyć odpowiednią granicę macierzy B^k - jest to szukana macierz A^k.

Dla macierzy wymiaru 2×2 metoda jest skuteczna zawsze. Dla większych macierzy jest efektywna, gdy umiemy wyznaczyć pierwiastki wielomianu charakterystycznego.

Pojawiać się będą granice typu $\frac{0}{0}$.

Krzysztof "*El Profe*"*Michalik*