Rachunek prawdopodobieństwa - lista 1.

1. Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi. Zapisać zdarzenie losowe odpowiadające poniższym warunkom.
   (a) Zajdzie przynajmniej jedno z powyższych zdarzeń. (Odpowiedź: $A \cup B \cup C$)
   (b) Zajdzie dokładnie jedno z powyższych zdarzeń.
   (c) Nie zajdzie żadne z powyższych zdarzeń.
   (d) Zajdą dokładnie dwa z powyższych zdarzeń.
   (e) Zajdą przynajmniej dwa z powyższych zdarzeń.
2. Niech $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ oraz $P(A \cap B) = 0.4$. Obliczyć
   (a) $P(A \cup B)$,
   (b) $P(A \cap B')$,
   (c) $P(A \cup B')$.
3. Niech $P(A \cup B) = 0.6$, $P(B \setminus A) = 0.2$ oraz $P(B') = 7P(A \cap B)$. Obliczyć
   (a) $P(A)$,
   (b) $P(A' \cup B')$.
4. (a) Udowodnić, korzystając z aksjomatów prawdopodobieństwa, że dla dowolnych zdarzeń losowych A i B zachodzi wzór $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   (b) Korzystając z powyższego wzoru uzasadnić analogiczny wzór dla trzech zdarzeń:
   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
   (c) (*) Udowodnić indukcyjnie tzw. wzór włączeń i wyłączeń czyli uogólnienie powyższych wzorów na n zdarzeń:
   $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$.
5. W grupie 25 studentów sześciu gra w szachy i w tenisa, dziesięciu gra tylko w tenisa, a trzech nie gra ani w szachy ani w tenisa. Przy pomocy diagramów Venna znaleźć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z tej grupy student
   (a) gra w szachy i w tenisa,
   (b) gra dokładnie w jedną z tych gier,
   (c) gra tylko w szachy,
   (d) nie gra w szachy.
6. Pudełko zawiera 1000 monet ponumerowanych od 1 do 1000. Wybieramy losowo jedną z monet. Obliczyć prawdopodobieństwo, że będzie to moneta o numerze
   (a) parzystym,
   (b) podzielnym przez 3,

(c) parzystym i podzielnym przez 3,
(d) parzystym lub podzielnym przez 3,
(e) parzystym lecz niepodzielnym przez 3.

7. Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką do gry. Wyznaczyć przestrzeń zdarzeń elementarnych tego eksperymentu, a następnie za pomocą diagramu kratowego/tabeli wyznaczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy

   (a) przynajmniej jedną szóstkę,
   (b) jedną czwórkę i jedną trójkę,
   (c) dwa identyczne wyniki,
   (d) wyniki o sumie równej osiem.

8. Ze standardowej talii 52 kart losujemy bez zwracania 3 karty. Wyznaczyć przestrzeń zdarzeń elementarnych tego eksperymentu. Następnie przy pomocy diagramu typu "drzewo" obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych trzech kart

   (a) nie będzie żadnego kiera,
   (b) będzie dokładnie jeden kier,
   (c) będą dokładnie dwa kiery.

Krzysztof „El Profe" Michalik