Rachunek prawdopodobieństwa - lista 3.

1. Niech $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ oraz $P(A \cup B) = 0.55$. Obliczyć
   (a) $P(A|B)$,
   (b) $P(B|A)$,
   (c) $P(A|B')$,
   (d) $P(A'|B')$.

2. Niech $P(A) = 0.6$ oraz $P(B) = 0.7$. Jeżeli A i B są niezależne to obliczyć
   (a) $P(A \cup B)$,
   (b) $P(A|B)$,
   (c) $P(B'|A)$,
   (d) $P(A'|(A \cup B))$.

3. (a) Udowodnić, że jeżeli A i B są zdarzeniami niezależnymi to niezależne są również zdarzenia A i B', A' i B oraz A' i B'.
   (b) Udowodnić, że jeżeli $P(A) = 0$ lub $P(A) = 1$ to A i dowolne zdarzenie B są niezależne.
   (c) Zbadać, które dwa zdarzenia rozłączne są jednocześnie niezależne.
   (d) Zbadać, które zdarzenia są niezależne od samych siebie.

4. Losujemy kartę ze standardowej talii. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosujemy pika, B - wylosujemy kiera, C - wylosujemy asa. Pokazać, że A i C są niezależne, a A i B nie są.

5. Punkt $P = (x, y)$ jest losowany z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. A oznacza zdarzenie, że odległość P od $(0, 0)$ jest mniejsza niż 1, B oznacza zdarzenie, że $x < y$. Zakładając prawdopodobieństwo geometryczne zbadać czy A i B są niezależne.

6. Prawdopodobieństwo, że Adam ukończy wyścig wynosi 55%, a prawdopodobieństwo, że Bartosz ukończy ten sam wyścig wynosi 65%. Zakładając niezależność powyższych zdarzeń obliczyć prawdopodobieństwo, ze
   (a) tylko Adam ukończy wyścig,
   (b) obaj biegacze ukończą wyścig,
   (c) przynajmniej jeden z nich ukończy wyścig,
   (d) Bartosz ukończy wyścig jeżeli przynajmniej jeden z biegaczy ukończy wyścig.

7. Rzucamy symetryczną kostką do gry tak długo aż pojawi się liczba większa niż 4.
   (a) Zakładając niezależność poszczególnych rzutów obliczyć prawdopodobieństwo, że wykonamy dokładnie n rzutów, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.
   (b) Uzasadnić, że prawdopodobieństwo, że wykonamy skończoną ilość rzutów wynosi 1.
   (c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość rzutów przekroczy 10.
   (d) Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość rzutów będzie liczbą podzielną przez 3.

8. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba jest zakażona pewnym typem wirusa wynosi 3%. Pacjent zostaje przebadany testem na obecność tego wirusa. Jeżeli pacjent jest zakażony to test daje wynik dodatni w $p = 90\%$ przypadków. Jeżeli pacjent nie jest zakażony to test daje wynik ujemny w $q = 98\%$ przypadków.

   (a) Jaki procent testów daje wynik dodatni?

   (b) Jeżeli test dał wynik dodatni to jakie jest prawdopodobieństwo, że przetestowany pacjent rzeczywiście jest zakażony?

   (c) Jeżeli test dał wynik ujemny to jakie jest prawdopodobieństwo, że przetestowany pacjent nie jest zakażony?

   Wynik w (b) jest wyraźnie gorszy niż w (c) i producent testu zamierza wprowadzić jego ulepszenie, które spowoduje powiększenie wartości prawdopodobieństw p lub q.

   (d) Jeżeli p zwiększy się do 1, a q pozostanie bez zmian to jaka będzie odpowiedź w punkcie (b)?

   (e) Jeżeli q zwiększy się do 1, a p pozostanie bez zmian to jaka będzie odpowiedź w punkcie (b)?

   (f) Jeżeli p pozostanie bez zmian to jaka powinna być wartość q aby jaka prawdopodobieństwo z punktu (b) wyniosło przynajmniej 99%?

9. Pewien przedmiot jest produkowany przez 3 typy maszyn: A, B oraz C. Spośród produkowanych przez A i B przedmiotów 2% jest wadliwych, a wśród przedmiotów produkowanych przez maszynę C wadliwych jest 3%. Maszyny B i C produkują średnio tyle samo przedmiotów, natomiast A produkuje ich 2 razy więcej niż B.

   (a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo zakupiony przedmiot tego typu jest wadliwy.

   (b) Po odpakowaniu okazało się, że przedmiot jest wadliwy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wytworzyła go maszyna C.

   (c) Drugi zakupiony przedmiot nie posiada wad. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wytworzyła go maszyna A.

10. Obok siebie leżą 2 nierozróżnialne talie kart: standardowa oraz do gry w "1000" czyli zawierająca 24 karty od asa do 9 w każdym z czterech kolorów. Wyciągnęliśmy 4 karty z jednej (losowo wybranej) talii i okazało się, że wśród nich są 2 asy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że była to talia standardowa?

Krzysztof „El Profe" Michalik