Rachunek prawdopodobieństwa - lista 4.

1. Zbadać czy istnieją stałe C dla których poniższe zmienne X są poprawnie zdefiniowanymi dyskretnymi zmiennymi losowymi. Tam, gdzie odpowiedź jest pozytywna wyznaczyć dokładne wartości C korzystając z odpowiedniego aparatu matematycznego i podać je w postaci maksymalnie uproszczonej.

   (a) $P(X = n) = Cn^3,\ n = 1, 2, 3, ..., 400.$

   (b) $P(X = n) = \dfrac{C}{3^n},\ n = 1, 2, 3, ..., 400.$

   (c) $P(X = n) = \dfrac{C}{3^n},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (d) $P(X = n) = C(\ln 3)^n,\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (e) $P(X = n) = C\mathrm{arctg}(n + 1) - C\mathrm{arctg}(n),\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (f) $P(X = n) = \dfrac{C}{\sqrt[3]{n}} - \dfrac{C}{\sqrt[3]{n+2}},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (g) $P(X = n) = C\sqrt{n+1} - C\sqrt{n},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (h) $P(X = n) = \dfrac{C\sqrt{3n^3 + n^2 - 1}}{2n^2 - 1},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (i) $P(X = n) = C \arcsin \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (j) $P(X = n) = C\dfrac{2^n}{n!},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (k) $P(X = n) = C\dfrac{(-2)^n}{n!},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (l) $P(X = n) = \dfrac{C}{2^n \cdot n},\ n \in \mathbf{N}_+.$

   (m) $P(X = n) = \dfrac{C \cdot 2^n}{(2n-1)!},\ n \in \mathbf{N}_+.$

2. X jest zmienna losową o rozkładzie

x	0	2	3
$P(X = x)$	C	0.45	0.25

   (a) Obliczyć C.

   (b) Obliczyć $P(X > 0 | X < 3)$.

   (c) Narysować wykres dystrybuanty X (obowiązuje wersja ciągła prawostronnie).

3. W grze w "1000" gracz dostaje 7 kart z talii składającej się z 24 kart: as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z czterech kolorów.

   Meldunek to król i dama w tym samym kolorze. Niech M będzie zmienną losową oznaczającą ilość meldunków w kartach danego gracza (przed ich obejrzeniem). Wyznaczyć rozkład M.

4. X jest zmienna losową o rozkładzie

x	$\frac{1}{3}$	0	2	4
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

   Wyznaczyć rozkłady zmiennych

(a) $Y = 3X - 1$,

(b) $Z = X^2 - 2X$,

(c) $T = \cos(\pi X)$.

5. X jest zmienną losową o rozkładzie $P(X = n) = 0.4 \cdot 0.6^{n-1},\ n \in \mathbf{N}_+$.

   Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$.

6. Niech $\alpha \in (0, 100)$ i niech P_α będzie kwantylem rzędu α zmiennej losowej X, a F jej dystrybuantą. Uzasadnić poniższe własności.

   (a) $a = P_\alpha \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to a^-} F(t) \leq \frac{\alpha}{100} \leq F(a)$.

   (b) Jeżeli dla pewnego a mamy
   $\lim\limits_{t \to a^-} F(t) < \frac{\alpha}{100} < \lim\limits_{t \to a^+} F(t)$ (czyli a jest punktem skoku F przez wartość $\frac{\alpha}{100}$)
   to a jest jedyną liczbą równą P_α.

   (c) Jeżeli $\forall a \in \mathbf{R}\ P(X = a) = 0$ to $a = P_\alpha \Longleftrightarrow F(a) = \frac{\alpha}{100}$.

7. Obliczyć

   - wartość oczekiwaną,
   - wariancję i odchylenie standardowe,
   - medianę i kwartyle,
   - kwantyl rzędu 90,

   dla zmiennej X z zadania

   (a) 2,

   (b) 4,

   (c) 5.

8. X to zmienna losowa dla której $E(X) = 2$, $VarX = 7$ oraz $E(X^3) = 20$. Obliczyć

   (a) $E(2X + 5)$,

   (b) $Var(1 - 3X)$,

   (c) $E(X^2)$,

   (d) $E\left((X - 1)^3\right)$.

9. W grze 'Kieromania' gracz wyciąga jednocześnie 4 karty ze standardowej talii. Jeżeli wyciągnie dwa kiery wygrywa 2\$, jeżeli wyciągnie trzy kiery - 5\$, a jeżeli same kiery - 10\$. W pozostałych przypadkach traci 1\$.

   (a) Zdefiniować zmienna opisującą zysk/stratę gracza po jednej partii tej gry. Znaleźć rozkład tej zmiennej zaokrąglając każde prawdopodobieństwo do 3 miejsc po przecinku.

   (b) Czy gra jest sprawiedliwa? Odpowiedź uzasadnić.

   (c) Wyznaczyć oczekiwany wynik gracza po 100 partiach tej gry.

10. W grze "6 dla bohatera, 1 dla zera" gracz rzuca jednocześnie trzema symetrycznymi kostkami do gry. Wyrzucenie przynajmniej jednej jedynki kończy partię i oznacza stratę 1$. W pozostałych przypadkach gracz otrzymuje 1$ za każdą wyrzuconą szóstkę.

    a) Skonstruować zmienną losową opisującą wynik gracza po jednej partii tej gry.

    b) Jaka powinna być wysokość wygranej za każdą wyrzuconą szóstkę by gra była sprawiedliwa? Podać wynik dokładny lub zaokrąglony do 0,1$.

11. W grze w tysiąca każdy z trzech graczy otrzymuje początkowo 7 kart z talii 24 kart (as, król, dama, walet, 10 i 9 w każdym z 4 kolorów), a pozostałe 3 karty leżą osobno jako tzw. "musik". Pierwsza faza gry to licytacja. Gracz, który wygra licytację zabiera karty musika dla siebie.

    Gracz nr 1 ma w karcie asa, 10 i damę kier, asa , damę i waleta pik oraz damę trefl. Zastanawia się czy warto wejść do licytacji.

    (a) Graczowi temu na pewno opłaci się wejść do licytacji jeżeli w kartach musika znajduje się przynajmniej jeden król do pary do którejś z dam - a więc król kier, król pik lub król trefl. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego zdarzenia?

        Gracz nr 1 zdecydował się wejść do licytacji i wygrał ją. Zabrał dla siebie karty musika, a w nich były: walet kier, król pik i król trefl. W tym momencie ma trzy sensowne strategie:

        - strategia 1: zadeklarować "110", co daje pewny zysk 110 punktów,
        - strategia 2: zadeklarować "130", co oznacza zysk 130 punktów lub stratę 130 punktów,
        - strategia 3: zadeklarować "160", co oznacza zysk 160 punktów lub stratę 160 punktów.

        Strategia 2 przyniesie stratę jeżeli któryś z pozostałych graczy będzie miał w swoich kartach pozostałe 2 piki (czyli 10 i 9) oraz króla i damę karo. W przeciwnym wypadku strategia ta przyniesie zysk.

        Strategia 3 przyniesie stratę jeżeli któryś z pozostałych graczy będzie miał w swoich kartach pozostałe 2 piki (czyli 10 i 9). W przeciwnym wypadku strategia ta przyniesie zysk.

    (b) Obliczyć prawdopodobieństwo zysku dla każdej strategii z dokładnością do najbliższego procenta.

    (c) Skonstruować zmienne losowe, która opisują zysk/stratę gracza 1 przy zastosowaniu każdej z trzech strategii.

    (d) Która ze strategii będzie dla gracza korzystniejsza w dłuższym terminie? Odpowiedź uzasadnić.

Krzysztof „El Profe" Michalik