Rachunek prawdopodobieństwa - lista 5.

1. Niech $X \sim B(6, 0.75)$. Obliczyć dokładną wartość
   (a) $P(X = 4)$,
   (b) $P(X > 2)$,
   (c) $P(X \geq 2)$,
   (d) $P(1 \leq X \leq 4)$,
   (e) $P(0 < X < 4)$.
2. X ma rozkład dwumianowy taki, że $E(X) = 9$ i $Var(X) = 3.6$. Obliczyć $P(X > 1|X \leq 3)$.
3. Niech $X \sim B(n, p)$, $n \geq 2$. Niech $p_k = P(X = k)$. Znaleźć warunki na p względem n tak, by p_k
   (a) był malejący,
   (b) był rosnący,
   (c) nie był monotoniczny i swoje maksimum osiągał dokładnie raz,
   (d) swoje maksimum osiągał 2 razy.

   Znaleźć miejsca, gdzie te maksima są osiągnięte (czyli najbardziej prawdopodobne wyniki rozkładu).
4. Podczas cyklu produkcyjnego badania wykazały, że 12% produkowanych obiektów jest wadliwa. Próbka 10 takich produktów została losowo.
   (a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie produkty w próbce są bez wad.
   (b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej 3 produkty w próbce są wadliwe.
   (c) Jeśli paczka zawiera 1000 takich produktów to jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba obiektów wadliwych?
5. Barbara ma 4 doniczki z ziemią i w każdej umieszcza ziarno danej rośliny kwiatowej. Szansa, że ziarno zakiełkuje jest taka sama dla każdej z doniczek i wynosi 80%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
   (a) wszystkie nasiona zakiełkują,
   (b) dokładnie 3 nasiona zakiełkują,
   (c) więcej niż 2 nasiona zakiełkują.

   Barbara chce zobaczyć przynajmniej jednego kwiatka i w tym celu rozważa zwiększenie plantacji. Ile doniczek z nasionami powinna posiadać by mieć 99.99% szans na to, że wykiełkuje przynajmniej jedna roślina?
6. Rzucamy symetryczną kostką do gry do momentu aż pojawi się szóstka.
   (a) Jeśli X jest zmienną opisującą ilość wykonanych rzutów to wyznaczyć jej rozkład.
   (b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość rzutów będzie parzysta.
   (c) Jakiej ilości rzutów należy oczekiwać?

(d) Sprawdzić czy rozkład X spełnia tzw. prawo 2σ, tzn. czy $P(|X - EX| \leq 2\sigma_X) \geq 95\%$.

7. W grze "Duże się liczy" gracz ma 2 symetryczne kostki i rzuca po kolei każdą z nich do momentu aż obie dadzą wynik większy niż 4. Zysk zależy od łącznej liczby wykonanych rzutów. Jeśli były to 2 rzuty to wygrana wynosi 2\$, jeśli 3 – 1\$, a jeśli 4 to gracz remisuje (nic nie wygrywa). W pozostałych przypadkach gracz przegrywa 1\$.

   Obliczyć, z dokładnością do 1 centa, oczekiwany wynik gracza po 100 rundach tej gry.

8. Rozwiązać zadanie 3 dla zmiennej X o rozkładzie ujemnym dwumianowym $NB(n, p)$, $n \geq 2$.

9. X ma rozkład Poissona z intensywnością $\lambda = 2$. Obliczyć

   (a) $P(X = 1)$,
   (b) $P(X \geq 2)$,
   (c) $P(1 \leq X \leq 4)$,
   (d) $P(0 < X < 4)$.

10. X ma rozkład Poissona taki, że $P(X = 1) = 2P(X = 3)$. Obliczyć

    (a) wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe X,
    (b) $P(X > 2|X > 0)$.

11. Wewnętrzna centrala telefoniczna w danej firmie odbiera średnio 3 rozmowy na minutę. Zakładając rozkład Poissona obliczyć prawdopodobieństwo, że w okresie 1 minuty

    (a) były przynajmniej 2 rozmowy,
    (b) były 3 rozmowy wiedząc, że odbyła się przynajmniej 1 rozmowa.

12. Na pewnym odcinku drogi ma miejsce średnio 1 wypadek na 4 dni Zakładając rozkład Poissona obliczyć prawdopodobieństwo, że

    (a) w danym dniu nie będzie żadnego wypadku,
    (b) w danym tygodniu będą przynajmniej 2 wypadki.

13. Produkowana stalowa lina zawiera średnio 2 uszkodzenia na 5 metrów. Zakładając rozkład Poissona obliczyć prawdopodobieństwo, że lina będzie zawierać 3 uszkodzenia na długości

    (a) 2 metrów,
    (b) 10 metrów.

    Jaka powinna być maksymalna długości takiej liny aby mieć 90% szans na to, że nie będzie uszkodzeń? Podać wynik z dokładnością do 1cm.

Krzysztof „El Profe” Michalik