Rachunek prawdopodobieństwa - lista 6.

1. Wyznaczyć wszystkie wartości stałych a, b i c tak, by funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 1, \\ c & , \ x = 1, \\ a\dfrac{x^7-1}{x-1} + b & , \ 1 < x < 2, \\ 1 - \dfrac{1}{x} & , \ x \geq 2, \end{cases}$$
była
   (a) dystrybuantą pewnego rozkładu probabilistycznego,
   (b) dystrybuantą ciągłego rozkładu probabilistycznego.

   Wyznaczyć gęstość rozkładu z punktu b).

2. Wyznaczyć największą wartość stałej a i odpowiadającą jej wartość C tak, by funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0, \\ C\sqrt{x}\ln x & , \ 0 < x < a, \\ 1 & , \ x \geq a, \end{cases}$$
była dystrybuantą ciągłego rozkładu probabilistycznego. Wyznaczyć gęstość tego rozkładu.

3. Zbadać czy istnieją stałe C dla których poniższe funkcje są gęstościami zmiennej losowej. Tam, gdzie odpowiedź jest pozytywna wyznaczyć dokładne wartości C korzystając z odpowiedniego aparatu matematycznego i podać je w postaci maksymalnie uproszczonej.
   (a) $f(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}(x+9)} \cdot \mathbf{1}_{[3,9]}(x)$.
   (b) $f(x) = Cx \cdot 2^x \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)$.
   (c) $f(x) = C\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$.
   (d) $f(x) = \dfrac{C + \sin x}{x\sqrt{x-1}} \cdot \mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$.
   (e) $f(x) = \dfrac{C \cdot 2^x}{\sqrt[3]{(2^x-8)^2}} \cdot \mathbf{1}_{(3,4)}(x)$.
   (f) $f(x) = \dfrac{C}{\sqrt{\sin x}} \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}(x)$.
   (g) $f(x) = \dfrac{C\mathrm{arctg} x}{\sqrt[5]{x^6}} \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

4. Gęstość zmiennej losowej X jest dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{14}\sqrt{x} & , \ x \in [1,a], \\ 0 & , \ x \notin [1,a]. \end{cases}$$
   (a) Znaleźć wartość a.

(b) Obliczyć $P(X > 3 | X \geq 2)$ oraz $P(X > 2 | X \geq 3)$.

(c) Sprawdzić czy rozkład ten spełnia tzw. prawo 2σ, tzn. czy $P\left(|X - EX| \leq 2\sigma_X\right) \geq 95\%$.

5. Gęstość zmiennej losowej X jest dana wzorem $f(x) = \dfrac{2}{\ln 2} \cdot \dfrac{x}{x^2+1} \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

   (a) Wykazać, że jest to poprawnie zdefiniowana zmienna losowa.

   (b) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X. Podać dokładny wynik w postaci maksymalnie uproszczonej.

   (c) Wyprowadzić wzór na dystrybuantę X oraz na wartość kwantyla rzędu $\alpha \in (0, 100)$.

6. Gęstość zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & , \ x \in [-2, 0], \\ \dfrac{C}{x^2\sqrt{x}} & , \ x \in [1, \infty), \\ 0 & , \ x \notin [-2, 0] \cup [1, \infty). \end{cases}$$

   (a) Znaleźć wartość C.

   (b) Obliczyć $P(X < 4 | X \geq -1)$. Podać dokładny wynik w postaci maksymalnie uproszczonej.

   (c) Wyprowadzić wzór na dystrybuantę X i narysować jej wykres.

   (d) Obliczyć medianę oraz górny kwartyl X.

   (e) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

7. Zmienna X ma gęstość f, która jest symetryczna względem prostej $x = a$, tzn. $\forall x \in \mathbf{R} \;\; f(a + x) = f(a - x)$.

   (a) Wykazać, że dystrybuanta X spełnia warunek $F(a + x) = 1 - F(a - x)$.

   (b) Udowodnić, że $medX = a$ oraz znaleźć związek między kwantylami rzędu α i $100 - \alpha$.

   (c) Obliczyć wartość oczekiwaną X w przypadku, gdy istnieje.

8. Gęstość zmiennej losowej X jest dana wzorem $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 & , \ x \in [-1, 1], \\ 0 & , \ x \notin [-1, 1]. \end{cases}$

   Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości zmiennych

   (a) $Y = 2X + 1$,

   (b) $Z = X^2$,

   (c) $S = \dfrac{1}{X}$,

   (d) $T = \cos(\pi X)$.

9. (zadanie do samodzielnego przeliczenia w ramach powtórki podstaw)
Dla podanych poniżej funkcji f rozwiązać nierówność $f(x) \le y$ jeżeli

- $x \in D_f$,
- $x \in D_f \cap (0, \infty)$,
- $x \in D_f \cap [-1, 1]$.

(a) $f(x) = 2x - 1$,
(b) $f(x) = 2x^3 - 1$,
(c) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 1$,
(d) $f(x) = 2\sqrt{x+2} - 1$,
(e) $f(x) = 2e^{-2x}$,
(f) $f(x) = e^{2x} + e^x$,
(g) $f(x) = 2\ln(x+2) - 1$,
(h) $f(x) = \arccos x$,
(i) $f(x) = 2x^2 - 1$,
(j) $f(x) = x^2 - x$,
(k) $f(x) = x^4 - x^2$,
(l) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$,
(m) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$,
(n) $f(x) = |2x - 1|$,
(o) $f(x) = |x^2 - x|$,
(p) $f(x) = e^{2x} - e^x$,
(q) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$,
(r) $f(x) = \sin(\pi x)$, $D_f = [0, 2]$,
(s) $f(x) = \cos\left(\pi x - \dfrac{2}{3}\pi\right)$, $D_f = \left[0, \dfrac{5}{3}\right]$.

10. (ciąg dalszy zadania 8) Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości zmiennych $Y = f(X_1)$ oraz $Z = f(X_2)$, gdzie f to funkcje z poprzedniego zadania, X_1 jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-1, 1]$, a X_2 jest zmienną o rozkładzie wykładniczym ze średnią $\dfrac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.

Krzysztof „El Profe" Michalik