MAP 1143 – ANALIZA MATEMATYCZNA 1.1 B

Zadania z listy oznaczone gwiazdką (∗) są nieco trudniejsze albo mają charakter teoretyczny. Jednak nie wychodzą one poza ramy programu kursu. Odpowiedzi do zadań z listy można zweryfikować za pomocą programów komputerowych. Istnieje wiele programów do obliczeń numerycznych i symbolicznych. Programy te można wykorzystać np. do rysowania wykresów funkcji, obliczania granic ciągów i funkcji, wyznaczania całek i pochodnych, rozwiązywania równań algebraicznych i różniczkowych, badań statystycznych. Polecamy stronę internetową **Wolfram Alpha** oraz darmowe programy: **Maxima**, **Microsoft Mathematics**, **Octave**, **pakiet R**, **Sage**, **Scilab**, a także programy płatne: **Derive**, **Mathematica**, **Matlab**, **Maple**, **Scientific WorkPalce**.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów można znaleźć na stronie internetowej

http://www.im.pwr.wroc.pl/kursy-ogolnouczelniane/oceny-celujace.html

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. Zbigniew Skoczylas
Wrocław, wrzesień 2012

Listy zadań

Lista 1

1.1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:

a) „Amsterdam jest stolicą Holandii"; **b)** „liczba 123888 jest podzielna przez 8"; **c)** „$a^2 + b^2 = c^2$";
d) „trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest ostrokątny"; **e)** „$2^5 \geqslant 32$"; **f)** „$\Delta = b^2 - 4ac$".

1.2. Napisać zaprzeczenia zdań:

a) „jem śniadanie i słucham radia"; **b)** „kwadrat nie jest pięciokątem";
c) „stolicą Polski jest Gniezno lub Wrocław"; **d)** „jeśli jutro będzie ciepło, to pójdę na basen";
e) „liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 3".

1.3. Ocenić prawdziwość zdań złożonych:

a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$";
b) „$(-1)^{44} = -1$ lub 2008 jest liczbą parzystą";
c) „funkcja $g(x) = \sin x$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x$ nieparzysta";
d) „jeżeli Piotr jest synem Tadeusza, to Tadeusz jest starszy od Piotra";
e) „liczba 13579 jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ jest podzielna przez 9".

1.4. Czy podane funkcje zdaniowe są prawami logicznymi:

a) $\neg(p \vee q) \Longrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$; **b)** $p \Longrightarrow [(q \wedge \neg q) \Longrightarrow r]$; **c)** $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\neg p) \vee q]$; **d)** $[p \wedge (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge q]$?

1.5. Zbiory określone za pomocą formy zdaniowej zapisać w prostszej postaci:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\right\}$; **b)** $\left\{n \in \mathbb{N} : \text{liczba } n^2 - n \text{ jest parzysta}\right\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 3) \vee (x \geqslant 5)\}$; **d)** $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ jest podzielne przez } 5\}$;
e) $\left\{x \in \mathbb{R} : (x > 0) \Longrightarrow \left(x^2 > 0\right)\right\}$; **f)** $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{N} \ \wedge \ x < y < z \ \wedge \ xyz = 16\}$.

1.6. Podać przykłady warunków, które spełniają tylko elementy zbiorów:

a) $[-1, 7]$; **b)** $\{\text{trójkąt równoboczny, kwadrat}\}$; **c)** $\{2, 4, 6, \ldots\}$;
d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right\}$; **e)** $\{1\} \cup [2, 3]$; **f)** $\{-1, 1, -3, 3, -5, 5, -15, 15\}$.

1.7. Zbadać, czy podane formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

a) $\displaystyle\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \sin x = \frac{1}{2}$; **b)** $\displaystyle\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 4x + 3 > 0$; **c)** $\displaystyle\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} x^2 - y^2 = 0$;

d) $\displaystyle\bigvee_{y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} xy = 0$; **e)** $\displaystyle\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} (y \leqslant x) \vee (y > x)$; **f)** $\displaystyle\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \bigvee_{x \in \mathbb{R}}! \, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \wedge \operatorname{tg} x = y$.

1.8. Dla podanych par zbiorów A, $B \subset \mathbb{R}$ wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c, B^c, $A \triangle B$:

a) $A = (0, 5)$, $B = [0, 7]$; b) $A = (-\infty, 3)$, $B = [-1, \infty)$;

c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$; d) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

Wskazać te pary A, B, dla których $A \subset B$.

1.9. Wyznaczyć wszystkie podzbiory zbioru $\{\bigcirc, \triangle, \square\}$.

1.10*. Która z relacji $A \subset B$, czy $B \subset A$ zachodzi, gdy:

a) $A \cup B = A$; b) $A \cup B \subset A$; c) $A \setminus B = A$; d) $B \subset A \cap B$?

Lista 2

2.1. Określić i narysować dziedziny funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+4}$; **c)** $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$;

d) $f(x) = \sqrt{-(x+3)^4}$; **e)** $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; **f)** $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - 8x + 16}$.

2.2*. Wyznaczyć zbiory wartości funkcji:

a) $f(x) = x^2 + 2x$; **b)** $f(x) = -\sqrt{x} + 2$; **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$;

d) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$; **e)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$; **f)** $f(x) = \dfrac{x^4-9}{x^2-3}$.

2.3. Na podanych przedziałach uzasadnić monotoniczność funkcji:

a) $f(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$; **b)** $f(x) = \sqrt{x-1}$, $[1, \infty)$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $[0, \infty)$; **d*)** $f(x) = x + |x|$, $\mathbb{R}$.

2.4. Wyznaczyć współczynnik kierunkowy a oraz wyraz wolny b funkcji liniowych $y = ax + b$:

a) $y = 1$; **b)** $y - x = 0$; **c)** $y = -x + 4$;

d) $y + 2x = 2$; **e)** $3x + 4y - 2 = 0$; **f)** $x - 5y = 3$.

2.5. W podanych przedziałach uprościć wyrażenia:

a) $x + |2 - x| + 3|1 - x|$, gdzie $x \in (1, 2)$; **b)** $|2x| - |x+1| + 2|x-2|$, gdzie $x \in (2, \infty)$;

c) $\dfrac{|x-1|}{|x+1|} - |2 - 3x|$, gdzie $x \in (-\infty, -1)$; **d)** $\big||1 - x| - 1\big| - 2|x - 2|$, gdzie $x \in (0, 1)$.

2.6. Korzystając z interpretacji geometrycznej $|x - a|$ zaznaczyć na osi liczbowej $\mathbb{R}$ rozwiązania nierówności:

a) $|3x - 1| \leqslant 2$; **b)** $\dfrac{1}{2}|2 - x| < 1$; **c)** $|5 - 4x| > 3$; **d)** $|2 - 3x| \geqslant 4$.

2.7. Sprowadzić do postaci iloczynowej (jeżeli istnieje) funkcje kwadratowe i naszkicować ich wykresy:

a) $f(x) = -x^2 + x$; **b)** $f(x) = 2x^2 + 1$; **c)** $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4}$;

d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; **e)** $f(x) = -2x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$; **f)** $f(x) = -x^2 - 3x - \dfrac{9}{4}$.

2.8. Wyznaczyć współczynniki oraz określić stopień funkcji wielomianowych:

a) $W(x) = (x+1)^3 - x(x-1)^2$; **b)** $W(x) = x^4 + 4x^3 - x^2(x+2)$;

c) $W(x) = (x+2)^3 - (x-2)^2$; **d)** $W(x) = (x+1)^2 - (2x+3)^3 - 2x$.

2.9*. Naszkicować przykład wykresu funkcji wielomianowej, dla której podano jej pierwiastki, ich krotności oraz znak współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x:

a) $x_1 = -2$ (2–krotny), $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $a_4 > 0$;

b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ (3–krotny), $x_3 = 2$, $a_5 < 0$;

c) $x_1 = -2$ (4–krotny), $x_2 = 0$ (2–krotny), $x_3 = 2$ (2–krotny), $a_8 > 0$;

d) $x_1 = -2$ (3–krotny), $x_2 = 0$ (3–krotny), $x_3 = 2$ (2–krotny), $a_8 > 0$.

2.10. Rozwiązać równania wymierne:

a) $\dfrac{4x-6}{2x^2-x+4} = 0$; **b)** $\dfrac{3}{4x-6} + \dfrac{2}{2x-3} = \dfrac{1}{5}$; **c)** $\dfrac{9x}{3x-1} = \dfrac{3}{3x+1} + 2$;

d) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{21}{x^2-x-2}$; **e)** $\dfrac{2x-1}{x} = \dfrac{3}{x+1} + 1$; **f)** $\dfrac{x-4}{x-2} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x-21}{x^2+x-6}$.

2.11. Rozwiązać nierówności wymierne:

a) $\dfrac{x^2-3x}{x+3} < 0$; **b)** $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} \geqslant 0$; **c)** $2 + \dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x}$;

d) $\dfrac{x^2+5x}{x-3} > x$; **e)** $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} > 0$; **f)** $\dfrac{-x^2+2x+4}{x-2} \leqslant 1$.

Lista 3

3.1. Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, jeżeli

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$; **b)** $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$; **d)** $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.

Wyznaczyć dziedziny tych funkcji złożonych.

3.2*. Uzasadnić, że złożenie funkcji:

a) rosnących jest funkcją rosnącą;

b) rosnącej i malejącej jest funkcją malejącą;

c) malejących jest funkcją rosnącą.

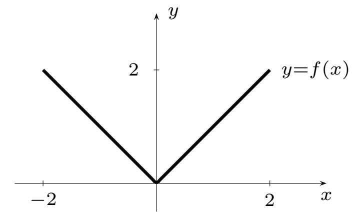
3.3. Znaleźć funkcje f i g takie, że $h = f \circ g$, jeżeli:

a) $h(x) = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$; **b)** $h(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x-1}$; **c)** $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$; **d)** $h(x) = x^4 + 2x^2 - 2$.

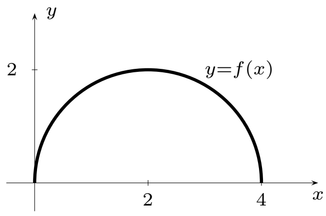
*Czy funkcje f i g są wyznaczone jednoznacznie?

3.4. Korzystając z wykresu funkcji f przedstawionego na rysunku

A)



B)



naszkicować wykresy funkcji:

a) $f(x) + 1$; **b)** $f(-x) - 1$; **c)** $f(x+1)$;

d) $-f(x) + 1$; **e)** $-f(x-1)$; **f)** $f(1-x) - 1$.

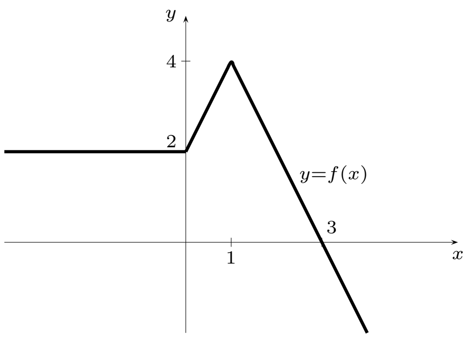
3.5. Przekształcając wykresy funkcji $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = |x|$ naszkicować funkcje:

a) $y = x^2 - 2,$ $\quad y = -\frac{1}{2}x^2,$ $\quad y = (x+3)^2,$ $\quad y = x^2 - 4x + 7;$

b) $y = -\frac{1}{x},$ $\quad y = \frac{2}{x},$ $\quad y = \frac{1}{x+3},$ $\quad y = \frac{3}{x-1};$

c) $y = |x-2|,$ $\quad y = \frac{1}{3}|x|,$ $\quad y = 1 - |x|,$ $\quad y = |x+4| - 2.$

3.6. Podany jest wykres funkcji $y = f(x)$



Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = f(x+1);$ **b)** $y = f(x) - 2;$ **c)** $y = f(x-1) + 3;$

d) $y = \frac{1}{2}f(x);$ **e)** $y = f(3x);$ **f)** $y = -f(x);$

g) $y = f(-x);$ **h)** $y = |f(x)|;$ **i)** $y = f(|x|).$

Lista 4

4.1. Kąty wyrażone w stopniach zapisać w radianach:

a) $10°$; **b)** $24°$; **c)** $45°$; **d)** $135°$; **e)** $350°$; **f)** $1080°$.

4.2. Kąty wyrażone w radianach zapisać w stopniach:

a) 1; **b)** $\frac{\pi}{24}$; **c)** $\frac{7\pi}{12}$; **d)** $\frac{4\pi}{3}$; **e)** $\frac{35}{36}\pi$; **f)** $\frac{21\pi}{12}$.

4.3. Na płaszczyźnie narysować w położeniu standardowym kąty:

a) $\frac{\pi}{8}$; **b)** $120°$; **c)** $-\frac{\pi}{5}$; **d)** $-270°$; **e)** $\frac{7\pi}{4}$; **f)** $-\frac{7\pi}{3}$.

4.4. Korzystając ze wzorów redukcyjnych zapisać podane wyrażenia w postaci funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; **b)** $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$; **c)** $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; **d)** $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

4.5. Zapisać w postaci funkcji trygonometrycznych kąta z pierwszej ćwiartki wyrażenia:

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; **b)** $\cos\frac{9}{2}\pi$; **c)** $\operatorname{tg}\left(-\frac{95}{3}\pi\right)$; **d)** $\operatorname{ctg}\frac{14}{9}\pi$.

4.6. Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $\cos\left(-\frac{19}{6}\pi\right) + \cos\frac{5\pi}{6}$; **b)** $\cos\left(-\frac{21}{4}\pi\right) - \sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; **c)** $\operatorname{tg}\left(-\frac{7}{3}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$; **d)** $\operatorname{ctg}\frac{13}{6}\pi + \operatorname{ctg}\left(-\frac{17}{6}\pi\right)$.

4.7. Uzasadnić tożsamości trygonometryczne:

a) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$; **b)** $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; **c)** $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$;

d) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; **e)** $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; **f)** $\dfrac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha=\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

Dla jakich kątów α są one prawdziwe?

4.8*. Wyprowadzić wzory:

a) $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; **b)** $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; **c)** $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; **d)** $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

4.9. Korzystając z wykresu funkcji $y=\sin x$ naszkicować w przedziale $[-\pi,\pi]$ wykresy funkcji:

a) $y=\sin 2x$; **b)** $y=\sin\dfrac{x}{3}$; **c)** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

d) $y=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$; **e)** $y=1+\sin x$; **f)** $y=\dfrac{1}{2}\sin x-1$.

4.10. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y=\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; **b)** $y=\sin x-\left|\dfrac{1}{2}\sin x\right|$; **c)** $y=1+\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

d) $y=\operatorname{tg}x+|\operatorname{tg}x|$; **e)** $y=\sin x+\cos x$; **f)** $y=|\operatorname{tg}x|\operatorname{ctg}x$.

4.11. Rozwiązać równania trygonometryczne:

a) $\sin x=-\sin 2x$; **b)** $\cos 4x=\sin\dfrac{x}{2}$;

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; **d)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

e) $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$; **f)** $\operatorname{ctg}2x=\operatorname{tg}2x$;

g) $\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}x$; **h)** $\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4.12. Rozwiązać równania trygonometryczne:

a) $\sin^2 x+\cos x\sin x=0$; **b)** $\sin x-2=\cos 2x$; **c)** $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+1=0$;

d) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$; **e)** $\sin\sqrt{x}=0$; **f)** $\cos\dfrac{1}{x}=1$.

4.13. Rozwiązać nierówności trygonometryczne:

a) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\geqslant\sqrt{3}$; **b)** $2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)<-1$; **c)** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)>-1$; **d)** $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$.

4.14. Rozwiązać nierówności trygonometryczne:

a) $\cos x\leqslant\sin\dfrac{x}{2}$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$; **b)** $\cos x+\sin x\geqslant\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

c) $\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}<0$; **d)** $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\leqslant 1$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lista 5

5.1. Rozwiązać równania wykładnicze:

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-3}=8$; **b)** $2\cdot 4^{2x}-3\cdot 4^x=-1$; **c)** $\left(\sqrt{5}\right)^x-\sqrt[3]{25}=0$;

d) $9^x+3^{x+1}=4$; **e)** $5^{\frac{8-3x}{x}}=5^{\frac{2x}{2-x}}\cdot 5^{\frac{x+5}{3-x}}$; **f)** $\dfrac{1}{3^x-4}+3^{1-x}=0$.

5.2. Rozwiązać nierówności wykładnicze:

a) $3^{4x-2} < 9^{2-x}$; **b)** $0.25^{\frac{x+1}{x}} < 0.0625$; **c)** $2^{x^2-1} - 3^{x^2} > 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

d) $\left|2^x - 2^{-x}\right| \leqslant \frac{3}{2}$; **i)** $\frac{1}{e^x - 1} < \frac{1}{e^{2x}+1}$; **j)** $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant 2^{x^2+2x-\frac{1}{2}} < \sqrt{2}$.

5.3. Rozwiązać równania logarytmiczne:

a) $4\log_2 x = \log_2 81$; **b)** $\log_4(x+4) - \log_4(x-1) = 2$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}} x = -2$; **d)** $\log_2\left(x^2-6\right) = 3 + \log_2(x-1)$.

5.4. Rozwiązać nierówności logarytmiczne:

a) $\log_5(5-3x) > 1$; **b)** $\log(3x-1) - \log(x-1) > \log 2$; **c)** $\frac{2}{\log_{\frac{1}{3}} x} \geqslant 1 - \log_3 x$; **d)** $\ln x + \frac{1}{\ln x} > 0$.

5.5. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **b)** $f(x) = x^4$, $[0, \infty)$; **c)** $f(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$; **d*)** $f(x) = x - \sqrt{x}$, $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$.

5.6. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; b) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$; c*) $f(x) = x^6 \operatorname{sgn} x$;

d*) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 2 + x & \text{dla } x \geqslant 0; \end{cases}$ e) $f(x) = 2^{x-1}$; f) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$;

g) $f(x) = \log(x+2)$; e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$; f) $f(x) = \log_2^3(x+1)$.

5.7*. Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; **b)** $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; **c)** $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right)$; **d)** $\sin\left(\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} 2\right)$.

5.8*. Funkcje odwrotne do podanych zapisać przy pomocy funkcji cyklometrycznych:

a) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; **b)** $f(x) = \cos x$, $x \in [\pi, 2\pi]$;

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; **d)** $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in (\pi, 2\pi)$.

Lista 6

6.1. Uzasadnić, że podane ciągi są ograniczone:

a) $a_n = \frac{2+\cos n}{3 - 2\sin n}$; b) $a_n = \sqrt[n]{2^n+1}$; c) $a_n = \frac{4^n - 1}{2^n + 3}$;

d) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$; e*) $a_n = \frac{1}{4^1+1} + \frac{1}{4^2+2} + \ldots + \frac{1}{4^n+n}$; f) $a_n = 2^n - 3^n$.

6.2. Zbadać, czy od pewnego miejsca są monotoniczne ciągi:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$; b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; c) $a_n = \frac{n!}{10^n}$;

d) $a_n = \frac{1}{n^2 - 6n + 10}$; e) $a_n = \frac{4^n}{2^n + 3^n}$; f) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

6.3.

a) W ciągu arytmetycznym dane są $a_5 = 12$ oraz $a_{12} = -9$. Wyznaczyć pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu.

b) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy $a_1 = 1000$, a różnica jest równa $r = -13$. Obliczyć sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu.

c) Liczby 2, 2^x, 2^x+3 tworzą ciąg arytmetyczny. Obliczyć x.

d) Wyznaczyć ciąg arytmetyczny, w którym suma trzech pierwszych wyrazów jest równa -6, a suma ich kwadratów 30.

e) Ile liczb, będących wielokrotnością 9, można znaleźć w przedziale $[30, 901]$.

f) Rozwiązać równanie $1+4+7+10+\ldots+n=651$.

6.4.

a) Suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 2, a suma kwadratów tych wyrazów wynosi 3. Znaleźć sumę wartości bezwzględnych wyrazów tego ciągu.

b) W ciągu geometrycznym siódmym wyrazem jest 13, a piętnastym 26. Obliczyć sumę $a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{10}$.

c) W ciągu geometrycznym drugi wyraz jest równy 3, a szósty 19. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 200?

d) Obliczyć sumę $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ oraz $a\in\mathbb{R}$.

e) Rozwiązać równanie $1+3+9+\ldots+x=364$.

6.5. Sprawdzić, który z podanych ciągów o wyrazie ogólnym a_n jest ciągiem arytmetycznym, a który geometrycznym:

a) $a_n=(-2)^{n+1}$; **b)** $a_n=2+4(n-1)$; **c)** $a_n=3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; **d)** $a_n=3(n+1)$.

6.6. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej uzasadnić równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-n}{n+4}=-1$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=0$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(2^n-5\right)=\infty$.

6.7. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+4}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^2+1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^{20}+2\right)^3}{\left(n^3+1\right)^{20}}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2(n+1)}{\log_3\left(n^2+2n+1\right)}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}\right)$; i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+6\sqrt{n}+1}-\sqrt{n}\right)$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+16}-n\right)$; k) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^{n+1}+3}}{2^n+1}$.

6.8*. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sin n}{3^n+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{3n+2}$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)$.

6.9. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n}$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$.

6.10. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4-3n^3-2n^2-1\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n-3^n\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(n+1)!}{n!+2}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\operatorname{arc\,ctg} n}$; h*) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]}$; i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} 2^n}{2^n}$.

Lista 7

7.1. Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej lub niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^5 = 1$; **b)** $\lim\limits_{x\to \pi^+} \lfloor x \rfloor = 4$; **c)** $\lim\limits_{x\to\ 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

7.2. Wskazując odpowienie dwa ciągi uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2}{x-3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{4-x^2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\sqrt{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn}(x+1)}$; **e)** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1}{\sin x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos\dfrac{1}{x^2}$.

7.3. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x^2-x+1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{1-x^2}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x(x-5)}$;

g) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; **h)** $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$;

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; **l)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+1}{3^x+2}$;

m) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x+5}$; **n)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$; **o)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

7.4. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sgn} x$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|^3}{x^3-x^2}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

7.5. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} u(x) = 1$, $u(2) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = -1$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = e$, $\lim\limits_{x\to 2} v(x) = 0$, funkcja v jest parzysta;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 5$;

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = -4$, $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 4$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} p(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2} p(x) = 0$, funkcja p jest okresowa i ma okres $T = 3$;

Na rysunkach wskazać fragmenty wykresów spełniające poszczególne warunki.

7.6. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3 \sin x^7}{\sin x^4 \sin x^6}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$; **h*)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}{x}$.

Lista 8

8.1. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$; **c)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-\pi}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; **e)** $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; **f)** $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x+1}$.

8.2. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x}+1 & \text{dla } x < -1, \\ b-2x & \text{dla } x \geqslant -1; \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{dla } x < -1, \\ 2x & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^3+bx & \text{dla } x > 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } |x| \geqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ ax+b & \text{dla } |x| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{dla } |x| < 2, \\ x\sqrt{x^2-4} & \text{dla } |x| \geqslant 2; \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x & \text{dla } |x| > \dfrac{\pi}{4}, \\ 1+\operatorname{tg} x & \text{dla } |x| \leqslant \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ **f)** $f(x) = \begin{cases} bx & \text{dla } x < \pi, \\ \dfrac{\sin x}{ax} & \text{dla } x \geqslant \pi. \end{cases}$

8.3. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić ich rodzaj:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+x+2} & \text{dla } x \neq 1, 2 \\ 0 & \text{dla } x = 1, \\ 1 & \text{dla } x = 2; \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \in (0,1) \cup (1,\infty), \\ 3 & \text{dla } x = 1; \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

e*) $f(x) = \operatorname{sgn}\left[x(x-1)\right]$; **f)** $f(x) = \begin{cases} 1-\cos\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

8.4. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $x^3+6x-2=0,\ (0,1)$; **b)** $x\sin x = 7,\ \left(2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right)$;

c) $1 = \dfrac{\sin x}{2}+x,\ \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; **d)** $x^{100}+x-1=0,\ \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Wyznaczyć rozwiązanie równania **a)** z dokładnością 0.125.

Lista 9

9.1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$; **b)** $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x > 0$;

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$; **e)** $f(x) = x^2 - 3x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

9.2. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

a) $y = \dfrac{x^2+1}{x^3+x}$; **b)** $y = \dfrac{\sin x}{x^4+4}$; **c)** $y = \left(1+\sqrt[4]{x}\right)\operatorname{tg}\sqrt{x}$; **d)** $y = \sin^6 x + \cos^6 x$;

e) $y = \sqrt{\sin\dfrac{1}{x^4}+3}$; **f)** $y = \cos\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\left(x^2\right)}$; **g)** $y = \left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)e^x$; **h)** $y = \dfrac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}$;

i) $y = \left(2^x+x\right)^3$; **j)** $y = e^{e^x}$; **k)** $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; **l)** $y = \sqrt{4^x+9^x}$;

m) $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$; **n)** $y = \ln\left(\sin^2 x + 1\right)$; **o)** $y = e^x \operatorname{arc\,tg} x$; **p)** $y = \sqrt[3]{\arcsin\left(x^2\right)}$.

9.3. Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe w punkcie $x_0 = 0$:

a) $f(x) = 3 - \sqrt[5]{x}$; **b)** $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}$; **c)** $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$; **d*)** $f(x) = \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}$.

9.4. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy we wskazanych punktach istnieją pochodne funkcji:

a) $f(x) = \left|x^2 - x\right|,\ x_0 = 1$; **b*)** $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{sgn}(x),\ x_0 = 0$;

c) $f(x) = \left|\operatorname{ctg}^3 x\right|,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; **d)** $f(x) = \left|x^5\right|,\ x_0 = 0$.

9.5. Obliczyć f', f'', f''' funkcji:

a) $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$; **b)** $f(x) = x \sin x$; **c)** $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; **d)** $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Lista 10

10.1. Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \sqrt{x},\ (4, f(4))$; **b)** $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2},\ \left(\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)\right)$;

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x},\ (0, f(0))$; **d)** $f(x) = x^4 - x + 2,\ (-1, f(-1))$.

10.2.

a) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.

b) Znaleźć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\dfrac{\pi}{4}$ z dodatnią częścia osi Ox.

c) Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.

d) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.

e) Wyznaczyć równanie prostej, która jest wspólną styczną wykresów funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = (x-2)^2 + 4$.

10.3.

a) Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:

i) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $x > 0$; ii) $f(x) = 4 - x$, $g(x) = 4 - \dfrac{x^2}{2}$, $x > 0$;

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$; iv) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

b) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wykresy funkcji $y = e^{ax}$, $y = e^{-x}$ przetną się pod kątem prostym?

10.4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

a) $\sqrt[3]{7.999}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{3.98}}$; **c)** $\ln \dfrac{2001}{2000}$;

d) $\ln 0.9993$; **e)** $e^{0.04}$; **f)** $\arccos 0.499$;

g) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \sin \dfrac{33\pi}{200}}$; **h)** $\dfrac{2}{1 + e^{0.005}}$; **i*)** $\ln\left(0.2 + \sqrt{1 + 0.04}\right)$.

10.5. Metodą Newtona wyznaczyć przybliżone rozwiązania równań:

a) $x^3 + 5x = 3$; **b)** $x^3 = 3x - 1$; **c)** $\cos x = x$; **d)** $2 \sin x = \sqrt{x+1}$.

10.6. Korzystając z metody Newtona obliczyć przybliżone wartości pierwiastków:

a) $\sqrt{10}$; **b)** $\sqrt[3]{2}$; **c)** $\sqrt[7]{5}$.

10.7. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(2^x + 1\right)}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln \sin \dfrac{\pi}{2} x}{\ln x}$; **c)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{arc\,ctg} x$; **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$; **f)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$.

Lista 11

11.1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice (cd.):

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; **h)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x$; **k)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$; **l)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

11.2. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$; **b)** $f(x)=e^x(x+1)$; **c)** $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$;

d) $f(x)=x\ln^2 x$; **e)** $f(x)=x^3-30x^2+225x$; **f)** $f(x)=xe^{-3x}$.

11.3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^4}$; **b)** $f(x)=x\ln x$; **c)** $f(x)=x-\sqrt{x}$;

d) $f(x)=\left|x^2-5x-6\right|$; **e)** $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$; **f)** $f(x)=x^3-4x^2$;

g) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$; **h)** $f(x)=(x-5)e^x$; **i)** $f(x)=2\operatorname{arc\,tg} x-\ln\left(1+x^2\right)$.

11.4. Zbadać przebieg zmienności funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x)=x\ln x$; **b)** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$; **c)** $f(x)=3-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$;

d) $f(x)=x2^{\frac{1}{x}}$; **e)** $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$; **f)** $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

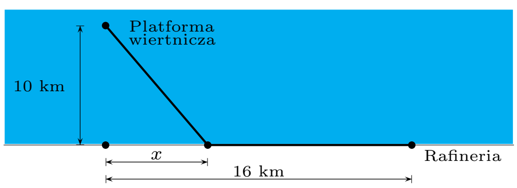
Lista 12

12.1. Znaleźć wartości najmniejsze i największe funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x)=2x^3-15x^2+36x,\ [1,5]$; **b)** $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x},\ [0,1]$;

c) $f(x)=(x-3)^2e^{|x|},\ [-1,4]$; **d)** $f(x)=1-\left|9-x^2\right|,\ [-5,1]$.

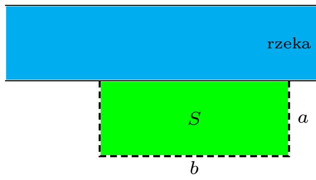
12.2. Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od brzegu. Ropa z tej platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie – 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?



12.3. Kropla deszczu spada pod wpływem siły ciężkości (pomijamy opór powietrza). W czasie spadku kropla paruje w ten sposób, że jej masa zmniejsza się proporcjonalnie do upływu czasu. Wiadomo, że po 5 sekundach wyparowała połowa jej masy. Po ilu sekundach energia kinetyczna kropli będzie największa?

12.4. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność $22.50\,\mathrm{m}^3$ i kwadratową podłogę. Koszt $1\,\mathrm{m}^2$ blachy potrzebnej do wykonania jego podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych – 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

12.5. Jakie powinny być wymiary a, b prostokątnego pola o powierzchni S, którego jednym naturalnym bokiem jest brzeg rzeki, aby na jego ogrodzenie zużyć jak najmniej siatki?



Lista 13

13.1. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} - 2x\sqrt{x}\right) dx$; b) $\int \frac{(1-x)\,dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; c) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$;

d) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos x - \sin x}$; e) $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$; f) $\int \frac{2^x - 5^x}{10^x}\,dx$.

13.2. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int xe^{-3x}\,dx$; b) $\int x^2 2^x\,dx$; c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x}\,dx$;

d) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; e) $\int x^2 \sin x\,dx$; f) $\int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{x+1}}$;

g) $\int \ln(x+1)\,dx$; h) $\int \arccos x\,dx$; i) $\int e^{2x}\sin x\,dx$;

j) $\int \sin x \sin 3x\,dx$; k) $\int \sin 3x \cos x\,dx$; l) $\int \cos x \cos 5x\,dx$.

13.3. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\int \frac{\sqrt{1+4x}}{x}\,dx$; c) $\int (x+1)\sin\left(x^2+2x+2\right)\,dx$; d) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}}$;

e) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x}$; f) $\int (5-3x)^{10}\,dx$; g) $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$; h) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

i) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; j) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; k) $\int \frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}$; l) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

13.4*. Obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int (|x|+1)\,dx$; b) $\int \min\left\{x, x^2\right\}\,dx$; c) $\int \left|1-x^2\right|\,dx$; d) $\int e^{|x|}\,dx$.

Lista 14

14.1. Obliczyć podane całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7}$; b) $\int \frac{dx}{x+5}$; c) $\int \frac{5\,dx}{(2-7x)^3}$; d) $\int \frac{8\,dx}{9x+20}$.

14.2. Obliczyć podane całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; b) $\int \frac{(6x+3)\,dx}{x^2+x+4}$; c) $\int \frac{(4x+2)\,dx}{x^2-10x+29}$;

d) $\int \frac{(x-1)\,dx}{9x^2+6x+2}$; e*) $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$; f*) $\int \frac{5\,dx}{\left(x^2+2\right)^3}$.

14.3. Obliczyć podane całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)}$; b) $\int \frac{x^2\,dx}{x+1}$; c) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$; d) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

e) $\int \frac{(4x+1)\,dx}{2x^2+x+1}$; f) $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^2-x+1}$; g) $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$; h) $\int \frac{2\,dx}{x^2+6x+18}$;

i) $\int \frac{(5-4x)\,dx}{x^2-4x+20}$; j) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$; k) $\int \frac{x(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$; l) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$.

Lista 15 – dodatkowa

15.1. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

a) $f(x) = xe^{-x}$; **b)** $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$; **c)** $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - 4\ln|x|$;

d) $f(x) = \sin x + \frac{1}{8}\sin 2x$; **e)** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; **f)** $f(x) = \cos x$.

15.2. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić nierówności:

a) $|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b| \leqslant |a-b|$ dla $a, b \in \mathbb{R}$; **b)** $\ln\frac{b}{a} < b - a$ dla $1 \leqslant a < b$;

c) $x \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \leqslant x < 1$; **d)** $e^x > ex$ dla $x > 1$.

15.3. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n :

a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$; **c)** $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$;

d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$; **e)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$; **f)** $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 4$.