Badania operacyjne

Matematyka Stosowana

1. zestaw zadań

1. Załóżmy, że pewne przedsiębiorstwo produkuje na 2 maszynach 4 produkty. Każdy produkt musi przejść przez obie maszyny, aby zostać ukończony. Tabela poniżej przedstawia czasy w minutach, jakich wymagają fazy produkcji produktów odbywające się na poszczególnych maszynach:

Nr maszyny	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Prod. 4
1	3	7	4	9
2	6	1	8	12

   Załóżmy, że każda z maszyn obsługiwana jest przez wykwalifikowane zespoły robotników w trakcie pojedynczej 8-godzinnej zmiany. Każdy zespół za swoją pracę dostaje 1000PLN dniówki. Jeśli istnieje taka potrzeba, godziny pracy każdego z zespołów mogą zostać wydłużone o pewien czas nie przekraczający 2 godzin. W takiej sytuacji za każdą dodatkową godzinę pracy zespół dostaje 200PLN (ta kwota jest przemnażana przez rzeczywiste nadgodziny). Wyprodukowane produkty sprzedawane są w następujących cenach za sztukę: 18PLN za 1. produkt, 15PLN za 2. produkt, 27PLN za 3. produkt, 32PLN za 4. produkt.

   W jaki sposób czas działania poszczególnych maszyn powinien być podzielony pomiędzy poszczególne maszyny? Ile nadgodzin musi wyrobić który z zespołów? Stwórz (bez rozwiązywania) model liniowy, który pozwoli menedżerowi na odpowiedzenie na te pytania. Jego celem jest maksymalizacja zysku firmy.

2. Rolnik posiada dwa pola o całkowitej powierzchni 40ha. Zamierza uprawiać wyłącznie marchew, szparagi, kapustę pekińską oraz ziemniaki. Ponieważ jego głównymi odbiorcami są sprzedawcy warzyw z pobliskiego miasta, wie, że co najmniej 10ha musi być wykorzystane pod uprawę ziemniaków i co najmniej 5ha pod uprawę marchwi. W zależności od rodzaju uprawy zmienia się koszt uprawy jednego hektara. Dla marchwi wynosi on 120PLN, dla szparagów 150PLN, dla kapusty 100PLN, dla ziemniaków tylko 800PLN. Na wydajność produkcji ma wpływ pogoda. W przypadku pogody umiarkowanej kształtuje się na poziomie 1.5q/ha, 2q/ha, 3q/ha oraz 2.5q/ha odpowiednio dla marchwi, szparagów, kapusty i ziemniaków. W przypadku wystąpienia upałów wydajność zmniejsza się o 15%, w przypadku deszczy wydajność spada do 70% wydajności dla umiarkowanej pogody. Cena, za jaką rolnik sprzedaje swoje uprawy, jest stała, niezależna od pogody i wynosi odpowiednio dla marchwi, szparagów, kapusty i ziemniaków: 70PLN/q, 100PLN/q, 80PLN/q i 50PLN/q. Długoterminowa prognoza zakłada, że deszcze wystąpią z prawdopodobieństwem 0.15, upały – 0.45, a pogoda umiarkowana – 0.4.

   Zapisz program linowy pomocny w podjęciu decyzji o uprawach. Znajdź jego rozwiązanie bez użycia algorytmu sympleks ani metody geometrycznej. Czy rolnikowi opłaca się uprawiać jakiekolwiek z założonych upraw?

3. Spółdzielnia rolnicza ma do dyspozycji 100ha, na których chce posadzić ziemniaki, rzepak, żyto i pszenicę. Zysk z 1ha ziemniaków jest szacowany na 2000PLN, z 1ha rzepaku na 2700PLN, z 1ha żyta na 1800PLN, natomiast z 1ha pszenicy na 3300PLN. Aby zabezpieczyć się przed chwastami, uprawy rzepaku oraz obu zbóż muszą być spryskane herbicydem, przy czym w przypadku rzepaku jego zużycie wynosi 10l/ha, w przypadku żyta 20l/ha, a w przypadku pszenicy 25l/ha. Koszt 1l herbicydu to 24PLN. Prawo UE precyzuje, że na 100ha upraw można zużyć co najwyżej 800 litrów herbicydów. Dodatkowo, oba zboża wymagają pod uprawę ziemi wysokiej klasy, której spółdzielnia ma tylko 60ha. Ostatnie ograniczenie jest takie, że spółdzielnia ma już zakontrakotowane dostarczenie pszenicy w ilości, która zajmie 15ha.

   Ile ziemi powinny zająć poszczególne uprawy, jeśli spółdzielnia chce zmaksymalizować swoje zyski? Sforumułuj zadanie programowania liniowego, które pozwoli odpowiedzieć na to pytanie. Spróbuj rozwiązać to zadanie bez użycia metody sympleks ani metody geometrycznej.

4. Zapisz poniższy problem w postaciach klasycznej i standardowej:

$$\begin{array}{ll} \text{Zminimalizuj} & 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{przy ograniczeniach} & 4x_1 - x_2 \leqslant 7, \\ & 5x_1 + x_3 \geqslant 9, \\ & x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{array}$$

5. Rozważ następujący problem z 3 zmiennymi x_1, x_2, x_3 rzeczywistymi:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{przy ograniczeniach} & 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leqslant 13, \\ & x_1 - 2x_3 \leqslant 4, \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6. \end{array}$$

Zapisz go w równoważnej postaci przy pomocy 4 zmiennych nieujemnych.

6. Metodą geometryczną rozwiąż następujące zadanie programowania liniowego:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + x_2 \geqslant 2, \\ & x_1 - x_2 \geqslant -4, \\ & 2x_1 - x_2 \leqslant -2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 10 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{array}$$

7. Metodą geometryczną rozwiąż następujące zadanie programowania liniowego:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & -3x_1 + 2x_2 \leqslant 2, \\ & x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ & 3x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ & x_1 \leqslant 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{array}$$

8. Odlewnia pomników ma zamówienie na wykonanie pomnika ze specjalnego stopu, który ma zawierać nie mniej niż 14% C, nie więcej niż 6% Mn, nie więcej niż 4% S i nie mniej niż 30% Sn. Odlewnia może zamówić trzy stopy sprzedawane w odlewach. Chce przy tym zminimalizować koszt materiału potrzebnego na odlanie pomnika, który ma ważyć 1 tonę, jeżeli proces technologiczny produkcji stopu polegać ma na stopieniu dostarczonych odlewów. W tabeli podano procentowe zawartości pierwiastków w poszczególnych stopach, ceny odlewów i ich masę. Dla uproszczenia zakładamy, że dowolny odlew można zamówić w dowolnej (również ułamkowej) ilości.

Odlew	C	Mn	S	Sn	Cena	Masa
I	19	7	6	29	55	75
II	12	2	8	40	50	60
III	15	4	3	25	70	800

Napisz program liniowy, pozwalający na znalezienie rozwiązania powyższego problemu. Korzystając z tego, że jedno z ograniczeń będzie miało formę równości, zredukuj liczbę zmiennych do dwóch, a następnie rozwiąż zadanie przy pomocy metody geometrycznej.

9. Rozważ program liniowy postaci:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + x_2 - x_4 = 4 + 2\Delta, \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 + 7\Delta, \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, \end{array}$$

gdzie $\alpha, \Delta \in \mathbb{R}$ są pewnymi parametrami.

(a) Korzystając z tego, że cześć ograniczeń ma formę równości, zapisz go w równoważnej postaci za pomocą 2 zmiennych.

(b) Korzystając z interpretacji geometrycznej problemu, zidentyfikuj, kiedy jest on nieograniczony (nie ma rozwiązania optymalnego). Dla przypadku, gdy rozwiązanie istnieje, znajdź jego postać (będzie kilka możliwych przypadków, zależnych od parametru Δ).