

# Badania operacyjne

## Matematyka Stosowana

### 2. zestaw zadań

1. Metodą geometryczną rozwiąż poprawione zadanie programowania liniowego z poprzedniej listy:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1 - x_2 \geq -4, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{array}$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są pewnymi stałymi rzeczywistymi.

- (a) Wskaż zbiory par parametrów  $(\alpha, \beta)$ , dla których rozwiązaniami są poszczególne wierzchołki zbioru rozwiązań dopuszczalnych.
- (b) Załóżmy, że  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  i możemy zmienić prawą stronę któregoś z ograniczeń (tylko jednego) o dowolną wartość. Zmiany których ograniczeń pozwolą na zwiększenie funkcji celu? O jaką maksymalnie wartość?

2. ([BHM77]) Rozważ następujący program liniowy:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & -3x_1 + 6x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & 5x_1 + 7x_2 \leq 35, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- (a) Rozwiąż go metodą graficzną. Sprawdź, że ma nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych.
- (b) Rozwiąż go metodą Sympleks. W jaki sposób fakt, że istnieje kilka rozwiązań optymalnych, można odczytać z końcowej tablicy algorytmu?

3. Metodą Sympleks rozwiąż następujący program liniowy (będą potrzebne obie fazy):

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & 4x_1 + x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & -x_1 + x_2 \leq -1, \\ & x_1 \leq 4, \\ & x_2 \geq 1, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Narysuj zbiór rozwiązań dopuszczalnych i zaznacz na nim punkty odwiedzane w kolejnych krokach procedury.

4. Metodą Sympleks rozwiąż następujący program liniowy (jak poprzednio, będą potrzebne obie fazy):

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & -2x_1 + x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + x_2 \geq 5, \\ & x_2 \geq 2, \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{array}$$

Narysuj zbiór rozwiązań dopuszczalnych i zaznacz na nim punkty odwiedzane w kolejnych krokach procedury.

5. Rozwiąż przykład z poprzedniego zadania metodą wielkiego M.

6. Rozważ następujący program liniowy:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 \leq 0, \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- (a) Spróbuj rozwiązać go metodą Sympleks. Zauważ, że po kilku krokach powracasz do punktu, w którym już byłeś.
- (b) Rozwiąż ten sam problem zamieniając prawe strony pierwszych dwóch ograniczeń na małą liczbę  $\varepsilon > 0$ .

7. Załóżmy, że masz do zainwestowania 100000PLN i do wyboru masz trzy inwestycje opisane w tabelce poniżej:

Inwestycja	Oczek. zwrot	Ryzyko na 1PLN
Maksimus	8%	4
Optimus	4%	3
Minimus	2%	1

Jeśli jakieś pieniądze nie zostaną zainwestowane, pozostają na koncie oszczędnościowym ze stopą zwrotu 0% i zerowym ryzykiem.

- Stwórz program liniowy pozwalający na znalezienie portfela inwestycyjnego, dla którego oczekiwany zwrot będzie największy, a średnia wartość ryzyka na zainwestowany 1PLN nie będzie przekraczać 2.
  - Rozwiąż ten program przy pomocy algorytmu Sympleks.
  - Korzystając z końcowej tablicy sympleksowej oraz reguły 100% określ (w podobny sposób jak w podpunkcie (b) 1. zadania), w jakim zakresie mogą zmienić się zwroty z poszczególnych inwestycji bez zmiany optymalnych inwestycji w poszczególne papiery.
  - Założmy, że możesz wziąć pożyczkę i w ten sposób uzyskać dodatkowe pieniądze na inwestycje. Przyjmując, że oczekiwane zwroty z inwestycji będą rzeczywiście takie, jak w tabeli, odpowiedz na pytania:
    - Jaka maksymalna kwota pożyczki nie zmienia składu (tzn. tego, które aktywa są w nim obecne) twojego portfela inwestycyjnego?
    - Przy jakim maksymalnie oprocentowaniu pożyczki, będzie ci się opłacało ją zaciągnąć?
8. Pewien mały producent obuwia ma w asortymencie 3 rodzaje butów: Walker, Hiker i Alpinist. Wśród materiałów potrzebnych do ich produkcji 3 są szczególnie trudne do zdobycia – dla uproszczenia podajemy jedynie ich funkcję. Zużycie poszczególnych materiałów do produkcji 1 egzemplarza poszczególnych typów butów przedstawione jest w poniższej tabeli:

Materiał	Walker	Hiker	Alpinist
uszczelnienie	1	2	4
ocieplenie	0.5	1	3
podeszwa	3	4	4

Materiał do uszczelniania można kupić w cenie 25PLN za jednostkę, materiał do ocieplania w cenie 200PLN za jednostkę, a materiał na podeszwę w cenie 80PLN za jednostkę. Ich ilość w sprzedaży jest ograniczona odpowiednio do 2000, 1200 i 5000 jednostek. Zyski ze sprzedaży pojedynczego buta poszczególnych typów wynoszą 100PLN dla typu Walker, 150PLN dla typu Hiker i 300PLN dla typu Alpinist, zaś maksymalny popyt na poszczególne typy to 3000 dla Walkerów, 1000 dla Hikerów i 200 dla Alpinistów.

- Zapisz program liniowy pozwalający na znalezienie liczby butów poszczególnych typów, które powinny być produkowane, aby zmaksymalizować zysk przedsiębiorstwa (nie uwzględniaj tego, że liczby butów muszą być całkowite) przy uwzględnieniu wszystkich ograniczeń dotyczących dostępności materiałów oraz popytu na poszczególne rodzaje butów.
- Rozwiąż go przy pomocy algorytmu Sympleks.
- Założmy, że masz pewną ilość dodatkowych pieniędzy do zainwestowania w firmę i zastanawiasz się, jak je wydać. Twoje opcje są następujące:
  - Zainwestować w reklamę butów któregoś typu. Wtedy oczekiwany wzrost sprzedaży butów poszczególnych typów wynosi: 1 Walker za każde 50PLN zainwestowanych, 1 Hiker za każde 80PLN zainwestowanych oraz 1 Alpinist za każde 240PLN zainwestowanych.
  - Zakupić materiał do uszczelniania butów od nowego dostawcy. Wtedy za jednostkę materiału zapłacisz 40PLN powyżej ceny, którą płaciłeś dotychczasowemu dostawcy (i w związku z tym uwzględniona jest w jednostkowych zyskach ze sprzedaży butów).
  - Zakupić materiał do ocieplenia od nowego dostawcy. Wtedy za jednostkę materiału zapłacisz 70PLN powyżej ceny u dotychczasowego dostawcy.
  - Zakupić materiał na podeszwę u nowego dostawcy. Wtedy za jednostkę materiału zapłacisz 60PLN powyżej ceny u dotychczasowego dostawcy.

W co powinienes zainwestować, żeby zmaksymalizować zwrot z tej inwestycji? Odpowiedz na to pytanie, korzystając z końcowej tablicy sympleksowej.

## Literatura:

[BHM77] S.P. Bradley, A.C. Hax, T.L. Magnanti, Applied Mathematical Programming, Addison-Wesley Publishing Company, 1977