

Teoria i metody optymalizacji

Automatyka i Robotyka

1. zestaw zadań

1. ([Be99]) Sprawdź, że funkcja $f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + y^2$ ma dwa minima globalne oraz punkt stacjonarny, który nie jest lokalnym minimum ani lokalnym maksimum.
2. Znajdź wszystkie minima i maksima lokalne funkcji

$$f(x, y, z) = x^3 + (x - 2y^2 + z)^2 + (x - z)^2.$$

3. Rozważ następujący problem z 3 zmiennymi x_1, x_2, x_3 rzeczywistymi:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{przy ograniczeniach} & 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 13, \\ & x_1 - x_3 \leq 4, \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 7. \end{array}$$

Zapisz go w równoważnej postaci przy pomocy 4 zmiennych nieujemnych.

4. Rozważ następujący (nieliniowy) problem:

$$\begin{array}{ll} \text{Zminimalizuj} & \max\{|2x_1 - 5x_2|, |3x_1 - x_2|\} \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Zapisz go jako program liniowy, wprowadzając dodatkową zmienną (oraz dodając pewne ograniczenia i zmieniając minimalizowaną funkcję).

5. Rozważ program liniowy postaci:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 + x_2 - x_4 = 4 + 2\Delta, \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 + 7\Delta, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \end{array}$$

gdzie $\alpha, \Delta \in \mathbb{R}$ są pewnymi parametrami.

- (a) Korzystając z tego, że część ograniczeń ma formę równości, zapisz go w równoważnej postaci za pomocą 2 zmiennych.
 - (b) Korzystając z interpretacji geometrycznej problemu, zidentyfikuj, kiedy jest on nieograniczony (nie ma rozwiązania optymalnego). Dla przypadku, gdy rozwiązanie istnieje, znajdź jego postać (będzie kilka możliwych przypadków, zależnych od parametru Δ).
6. Rozwiąż program liniowy

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & 3x_1 + x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 - x_2 \leq -1, \\ & x_1 \geq 1, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

za pomocą algorytmu Sympleks (będziesz musiał skorzystać z obu faz). Narysuj zbiór rozwiązań dopuszczalnych oraz zaznacz na obrazku punkty, które odwiedziłeś w kolejnych krokach procedury.

7. ([BHM77]) Rozważ następujący program liniowy:

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & -3x_1 + 6x_2 \\ \text{przy ograniczeniach} & 5x_1 + 7x_2 \leq 35, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- (a) Rozwiąż go metodą graficzną. Sprawdź, że ma nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych.

(b) Rozwiąż go metodą Sympleks. W jaki sposób fakt, że istnieje kilka rozwiązań optymalnych, można odczytać z końcowej tablicy algorytmu?

8. Rozważ (nieliniowy) problem

$$\begin{array}{ll} \text{Zmaksymalizuj} & \frac{2x_1 - x_2 + 3}{x_1 + 2x_2 + 2} \\ \text{przy ograniczeniach} & x_1 \leq 1, \\ & x_2 \geq 1, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Wprowadź 3 nowe zmienne, dzięki którym będziesz mógł zapisać go jako program liniowy. Rozwiąż go metodą Sympleks. Oblicz wartości x_1 i x_2 , odpowiadające otrzymanemu rozwiązaniu.

Literatura:

[Be99] D.P. Bertsekas, Nonlinear Programming, Athena Scientific, Belmont, MA: 1999.

[BHM77] S.P. Bradley, A.C. Hax, T.L. Magnanti, Applied Mathematical Programming, Addison-Wesley Publishing Company, 1977