

Teoria i metody optymalizacji

Automatyka i Robotyka

4. zestaw zadań

1. Które z poniższych funkcji są wypukłe? Które są kwadratowe?

(a) $f(x, y, z) = x^4 + x^2y^2 + y^4 + z^2 - 4yz + 4z^2$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + 4z^2 + 3xy - 2xz$

(c) $f(x, y, z) = x^4 + y^2z + z^2y$

(d) $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - 2x_2)^2 + (2x_2 - 3x_3)^2 + \dots + ((n-1)x_{n-1} - nx_n)^2$

2. Które z poniższych zbiorów są wypukłe? Które są zwarte? Które są (hiper)wielościanami?

(a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, y \geq 1, z \leq x + y\}$

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2 - xy\}$

(d) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq x + y, 0 \leq t \leq x + y + z\}$

3. Jaki algorytm należy zastosować do rozwiązania poniższego problemu i dlaczego?

(a) Zminimalizuj $e^{2x+y+z} + 2e^{x+3y+z+2t} + 3e^{2y+4t}$
przy ograniczeniu $x^2 + y^2 + (z+1)^2 + (t-1)^2 \leq 4$.

Zmaksymalizuj $\log_2 \left(1 + \frac{p_1}{1+q_1}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{p_2}{1+q_2}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{q_1}{1+p_1}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{q_2}{1+p_2}\right)$
(b) przy ograniczeniach $p_1 + p_2 = 10,$
 $q_1 + q_2 = 15,$
 $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, q_1 \geq 0, q_2 \geq 0.$

Zminimalizuj $\frac{x}{y^2} + y + z \leq 4$
(c) przy ograniczeniach $\sqrt{xy} + 2\frac{y}{z^2} \leq 1$
 $x\sqrt[3]{y} = 1.$

Zminimalizuj $x^2y + z$
(d) przy ograniczeniach $x + z = 4$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$