

Teoria i metody optymalizacji

Miniprojekty (programowanie liniowe)

LP1. (na podstawie [JKSW11]) Pewien zakład produkuje 4 wyroby, które obrabiane są na dwóch obrabiarkach oraz frezarce. Czas pracy tych maszyn jest ograniczony i wynosi 18000 maszynogodzin dla obrabiarki O_1 , 45000 maszynogodzin dla obrabiarki O_2 oraz 32000 maszynogodzin dla frezarki F . Zużycie czasu pracy maszyn na jednostkę wyrobu dla każdego z wyrobów podano w tabeli:

Maszyna	Wyrób I	Wyrób II	Wyrób III	Wyrób IV
O_1	0.3	0.1	0.2	0.4
O_2	0.2	0.4	0.5	0.6
F	0.3	0.2	0.7	0.4

Popyt na produkt I jest ograniczony do 40000 jednostek, popyt na produkt II do 25000, popyt na pozostałe produkty jest nieograniczony. Zysk ze sprzedaży jednostki wyrobu I to 6PLN, z jednostki wyrobu II to 3PLN, z jednostki III – 7PLN, a z jednostki IV – 5PLN. Jak zaplanować produkcję maszyn, żeby zmaksymalizować zysk firmy przy spełnieniu wszystkich ograniczeń? Odpowiedz na pytanie, rozwiązując odpowiedni program liniowy.

LP2. ([JKSW11]) Gospodarstwo rolne prowadzi hodowlę 3 ras opasów: S_1 , S_2 , S_3 , i dysponuje określoną liczbą roboczogodzin R , określoną zużyciem każdego z rodzajów pasz P_1 , P_2 i P_3 oraz zdolnościami produkcyjnymi dwóch maszyn: M_1 i M_2 , potrzebnych do przygotowania pasz. Niezbędne dane, w przeliczeniu na 1kg przyrostu żywca dla każdej z ras, podane są w tabeli. Podane są w niej również limity dostępności poszczególnych zasobów.

Środki	Zużycie S_1 na 1kg żywca	Zużycie S_2 na 1kg żywca	Zużycie S_3 na 1kg żywca	Limit dostępności
R	10	8	8	8000000
P_1	20	30	20	600000
P_2	10	20	30	600000
P_3	40	60	80	1200000
M_1	3	3	2	300000
M_2	2	1	4	400000

Rozwiązując odpowiednie zadanie programowania liniowego określ optymalny plan produkcji żywca, biorąc pod uwagę, że zysk z produkcji opasów poszczególnych ras wynosi odpowiednio: 0.9, 2.2 oraz 1.2PLN z 1kg przyrostu żywca.

LP3. ([JKSW11]) Zakład produkujący gwoździe otrzymuje drut o wymaganej grubości w 3-centymetrowych kawałkach. Kawałki te cięte są na krótsze odcinki odpowiadające długościom gwoźdźcia, tj. 11cm, 8cm oraz 5cm. Jak należy pociąć otrzymane kawałki drutu, aby wyprodukować 12000 gwoździ o długości 11cm, 24000 o długości 8cm i 27000 o długości 5cm, minimalizując ilość odpadów. Rozwiąż to zadanie, tworząc odpowiedni program całkowitoliczbowy.

LP4. ([JKSW11]) Zakład produkujący puszki do konserw otrzymał surowiec w postaci dwóch rodzajów blachy: 21500m blachy o szerokości 1.5m i 14000m blachy o szerokości 1.8m. Z blachy wycinane są potrzebne elementy denka i ściany boczne puszek. Stosowane sposoby rozkroju 1m bieżącego blachy o szerokości 1.5m podane są w tabeli:

	I	II	III
Denka	70	15	10
Ściany boczne	–	20	30

Sposoby rozkroju blachy o szerokości 1.8m są dla odmiany następujące:

	I	II	III
Denka	30	20	–
Ściany boczne	25	30	50

Zmaksymalizować liczbę otrzymanych puszek, pamiętając, że każda z nich ma 2 denka i 1 ścianę boczną. Zrobić to, rozwiązując odpowiednio sformułowane zadanie programowania całkowitoliczbowego.

- LP5. Firma Rury Zenona kupuje rury PCV o standardowej długości 100cm, a następnie tnie je na krótsze odcinki długości 10cm, 16cm oraz 42cm, które sprzedaje w swoim sklepie. Zapotrzebowanie na rury 3 powyższych długości podane jest w tabeli poniżej. Rury Zenona starają się zakupić taką liczbę rur 100-centymetrowych, aby podzielić je na rury krótszych rozmiarów bez produkcji odpadów.

	10cm	16cm	42cm
Zapotrzebowanie	1500	950	1370

Ile 100-centymetrowych rur powinna zakupić firma? Jak powinna je podzielić tak, żeby pokryć zapotrzebowanie na rury każdego z rodzajów, produkując jednocześnie możliwie najmniejszą liczbę nadmiarowych rur? Dojdź do tego, formułując i rozwiązując odpowiednie zadanie programowania całkowitoliczbowego.

Wskazówka: Rury długości 100cm można pociąć na mniejsze bez produkcji odpadów na różne sposoby (np. na dziesięć o długości 10cm albo dwie o długości 42cm i jedną o długości 16cm). Zmiennymi powinny być liczby rur 100-centymetrowych pociętych na różne sposoby.

- LP6. ([JKSW11]) W zakładzie doświadczalnym wyprodukowano nową odmianę pszenicy, która daje wysokie plony z hektara. Konieczne jest jednak stosowanie 3 nawozów: fosforowego, potasowego i naturalnego. Nawozy te zawierają cztery istotne składniki A, B, C i D. Zawartość tych składników w gramach na 1kg poszczególnych nawozów podana jest w tabeli:

Składnik	N. fosforowy	N. potasowy	N. naturalny
A	6	2	26
B	40	4	20
C	3	20	60
D	18	12	13

Minimalna ilość składnika A, jaka powinna być dostarczona na 1ha pszenicy to 96g, dla składnika B to 160g, dla składnika C to 120g, a dla składnika D to 152g. Określić najmniej kosztowną dawkę poszczególnych nawozów, która zapewni potrzebną ilość każdego ze składników, jeśli cena 1kg nawozu fosforowego to 5PLN, nawozu potasowego – 6PLN, a naturalnego – 2PLN. Zrobić to, tworząc odpowiedni program liniowy.

- LP7. ([JKSW11]) Żeliwo maszynowe (przeznaczone na odlewy) wytwarzane z 3 stopów powinno zawierać co najwyżej 14% C, nie więcej niż 8% Si, co najmniej 25% Mn i co najmniej 12% P. Zawartości procentowe poszczególnych pierwiastków w każdym ze stopów podano w tabeli:

Stop	C	Si	Mn	P
I	28	10	30	10
II	14	12	20	10
III	10	6	30	15

Tona stopu I kosztuje 100PLN, tona stopu II – 50PLN, a tona stopu III – 200PLN. Ile którego stopu należy kupić, żeby móc z nich wytworzyć 3000t żeliwa maszynowego najmniejszym kosztem. Odpowiedz na to pytanie, rozwiązując odpowiedni program liniowy.

- LP8. (Na podstawie [JKSW11]) Pewien dietetyk został poproszony przez producenta odżywek dla sportowców o opracowanie specjalnej odżywki na czas intensywnego treningu. Rozważa możliwość jej sporządzenia na bazie dwóch produktów, A i B, zawierających potrzebne składniki. Produkty te mogą pochodzić z produkcji krajowej (wtedy kosztują odpowiednio 12PLN i 18PLN za kilogram) lub z importu (wtedy kosztują odpowiednio 18PLN i 21PLN za kilogram). Produkcja krajowa produktu A nie przekracza 10 ton na miesiąc, a w przypadku produktu B – 20 ton. Producent chce produkować 500 ton odżywki miesięcznie i oczekuje informacji o tym, ile produktu A i B (i w jakiej cenie) ma kupić, żeby wyprodukować odżywkę spełniającą wymagania dotyczące minimalnej zawartości 4 składników odżywczych na kilogram odżywki zawarte w tabeli poniżej za minimalną cenę. Tabela zawiera także zawartości poszczególnych składników w 1kg produktu A i produktu B.

Składnik	Minimalna zawartość na 1kg odżywki	Zawartość składnika w 1kg prod. A	Zawartość składnika w 1kg prod. B
S_1	12	800	400
S_2	9	0	1200
S_3	30	800	900
S_4	24	1000	800

Pomóż producentowi, tworząc i rozwiązując odpowiedni program liniowy.

LP9. Jarek zastanawia się, w co zainwestować swoje oszczędności. Do wyboru ma

Inwestycja	Stopa zwrotu	Ryzyko	Możliwa likwidacja
Fundusz obligacji instytucjonalnych	12.75%	2	Nie
Fundusz obligacji komercyjnych	14.25%	3	Nie
Fundusz mieszany	18.15%	6	Nie
Fundusz akcji	23.05%	10	Tak
Konto oszczędnościowe	6.5%	0	Tak

Do zainwestowania ma 850000PLN i chce spełnić następujące cele:

- Ważona średnia współczynników ryzyka jest zminimalizowana.
- Średni oczekiwany zwrot wynosi co najmniej 16%.
- Co najmniej 200000PLN przeznaczone jest na inwestycje, które można zlikwidować w każdej chwili (patrz ostatnia kolumna tabeli).

Tworząc odpowiedni program liniowy znajdź optymalny sposób zainwestowania pieniędzy przez Jarka.

LP10. Duża restauracja pracująca 7 dni w tygodniu zatrudnia kelnerów. Na podstawie dotychczasowych doświadczeń, liczbę kelnerów potrzebnych w poszczególne dni szacuje następująco:

Dzień	Pon	Wt	Śr	Czw	Pt	Sob	Nie
Potrzebnych	15	7	9	12	20	25	30

Kelnerów zatrudnia na następujących zasadach: kelnerzy zatrudnieni na pełen etat pracują przez 5 (dowolnych) kolejnych dni, a następnie odpoczywają przez dwa kolejne; kelnerzy zatrudnieni na część etatu pracują przez 3 kolejne dni, następnie odpoczywają przez 4. Każdy pracownik powtarza swój układ dni pracujących i wolnych w każdym tygodniu. Pracownicy zatrudnieni na pełen etat dostają 450PLN za każdy dzień pracy, a pracownicy zatrudnieni na część etatu dostają po 500PLN za dzień.

- (a) Ustal, ilu kelnerów powinno zostać zatrudnionych na cały etat, a ilu na część etatu, a także to po ilu kelnerów zatrudnionych na pełny etat powinno zaczynać swoją pracę w poszczególne dni tygodnia. Zrób to, formułując odpowiednie zadanie programowania całkowitoliczbowego.
- (b) Załóżmy, że pracownicy zatrudnieni na część etatu pracują przez 2 kolejne dni zamiast 3. Czy to zmniejszy koszty restauracji?

LP11. (Na podstawie [MK80]) Firma zatrudniająca sprzętaczy do szpitali oszacowała na podstawie doświadczeń z poprzednich lat, że zatrudnienie w ich firmie ma charakter sezonowy. Liczba roboczogodzin potrzebnych w poszczególnych miesiącach roku przedstawiona jest w poniższej tabeli:

Miesiąc	Roboczogodziny
Styczeń	1600
Luty	1800
Marzec	1200
Kwiecień	800
Maj	600
Czerwiec	400
Lipiec	500
Sierpień	500
Wrzesień	700
Październik	900
Listopad	1000
Grudzień	1500

Osoby zatrudniane są na początku każdego miesiąca na okresy 3- lub 6-miesięczne. Każda zatrudniona osoba w pierwszym miesiącu zatrudnienia jest poddawana szkoleniu, przez co może wyrobić co najwyżej 80 roboczogodzin. W każdym kolejnym miesiącu wyrabia (co najwyżej) 176 roboczogodzin. Każdy wykwalifikowany pracownik dostaje miesięczne wynagrodzenie 3600PLN, pracownik na szkoleniu – 2800PLN. Napisz program całkowitoliczbowy, którego celem będzie ustalenie, ilu pracowników należy zatrudnić w każdym kolejnym miesiącu roku na umowy 3- oraz 6-miesięczne. Twoim celem ma być minimalizacja kosztów zatrudnienia przy pokryciu zapotrzebowania szpitali.

LP12. Przedsiębiorstwo Zenex zamierza przejąć 60 nowych pracowników z przedsiębiorstwa Franex. Dotychczas Zenex zatrudniał 140 pracowników, struktura zatrudnienia przedstawiała się w sposób następujący: średni staż 15 lat, średnie doświadczenie 12 punktów. Dane dotyczące struktury zatrudnienia Franexu przedstawiono w tabeli:

Staż pracowników (lata)	Doświadczenie (punkty)	Liczba pracowników
5	8	20
10	10	25
15	14	30
20	16	20

Jak znaleźć optymalne zatrudnienie, jeżeli chcemy maksymalizować średnie doświadczenie pracowników, gdy staż pracy nowej załogi nie może się zmienić o więcej niż 20%.

LP13. (Na podstawie [NPTEL14]) Pewna linia lotnicza zleciła badania na temat zapotrzebowania na bagażowych w obsługiwanym przez siebie porcie lotniczym. Z badań wynika, że zapotrzebowanie dla 24 godzin począwszy od północy wynosi odpowiednio: 8, 4, 5, 2, 1, 8, 9, 12, 14, 15, 20, 22, 15, 13, 10, 15, 19, 20, 24, 21, 16, 10, 10 i 9. Bagażowi pracują na 6 zmian: pierwsza startuje o północy, kolejne o 4, 8, 12, 16 oraz 20. Każda zmiana pracuje przez 8 kolejnych godzin. Zapotrzebowanie jest takie same każdego dnia. Stosując programowanie całkowitoliczbowe określ minimalną liczbę bagażowych potrzebnych do pokrycia zapotrzebowania oraz liczby tych, którzy w takiej sytuacji będą zaczynać swoją pracę o poszczególnych godzinach. Załóżmy, że godziny pracy bagażowych przedłużono do 10 godzin. Czy to poprawi rentowność linii, jeśli w takiej sytuacji musi pracownikom zapłacić 140% regularnej płacy za godziny nadliczbowe?

LP14. Rozważ 10 zadań do wykonania na 3 działających równolegle procesorach P1, P2 i P3. Czasy (w milisekundach) potrzebne do wykonania poszczególnych zadań na procesorze P1 to 23, 8, 15, 7, 9, 12, 13, 4, 12 i 9, na P2 to 20, 9, 11, 13, 11, 9, 17, 6, 15 i 10, natomiast na P3 są one równe 16, 14, 8, 15, 9, 11, 17, 19 i 13. Każde zadanie trzeba przypisać do dokładnie jednego procesora. Załóżmy, że wszystkie zadania powinny być zakończone w ciągu 25ms. Jeśli jakieś nie zostaną wykonane w tym terminie, musisz zapłacić karę równą 100PLN razy suma nadmiarowych czasów, które potrzebne są do zakończenia pracy na każdym z procesorów. Sformułuj i zaimplementuj zadanie programowania całkowitoliczbowego, umożliwiające przypisanie zadań do procesorów w taki sposób, żeby zapłacona przez ciebie kara była jak najmniejsza.

LP15. (Na podstawie [LP05]) Zenek Development zakupił dwie działki budowlane obok siebie, na których planuje wybudowanie nowego osiedla. Pierwsza działka ma $2900m^2$, a druga $5500m^2$. Osiedle ma składać się z domków jednorodzinnych 4 typów budowanych z prefabrykatów:

Model	Potrzebna powierzchnia (m^2)	Piętra	Sypialnie	Zysk (PLN)
A	100	1	2	350000
B	140	1	3	250000
C	130	2	3	300000
D	200	2	4	470000

Zakłada że co najmniej 25 ma być jednopiętrowa; co najmniej 30 ma mieć przynajmniej 3 sypialnie; ma być co najmniej 1 każdego modelu; na jednej z działek mają stanąć wyłącznie jednopiętrowe. Zenek Development chce zmaksymalizować zysk, spełniając przy tym wszystkie powyższe warunki. Sformułuj i rozwiąż zadanie programowania liniowego, które pozwoli na znalezienie optymalnego planu zabudowy osiedla.

LP16. Rozdzielić produkcję 4 elementów na 3 maszyny. Jedna maszyna może produkować, co najwyżej jeden element, żaden element nie może być produkowany więcej niż na jednej maszynie. Tabele podają (odpowiednio) koszty produkcji partii elementów w tysiącach PLN oraz jej wielkość w tysiącach sztuk w rozbięciu na poszczególne maszyny.

Element	M_1	M_2	M_3
A	5	6	7
B	3.5	4.5	5.5
C	5.5	4	7
D	6	5.5	6.5

Element	M_1	M_2	M_3
A	1	2	0.5
B	2	1.5	2.5
C	3	2	1
D	4	2.5	2

Jedna sztuka elementu A może być sprzedana za 10PLN, sztuka elementu B za 7PLN, elementu C za 5PLN, a elementu D za 9PLN. W jaki sposób przydzielić poszczególne maszyny do produkcji elementów, aby osiągnąć maksymalny zysk? Rozwiąż zadanie programowania liniowego, które pozwoli odpowiedzieć na to pytanie.

- LP17. (Oparte na [NPTEL14]) Załóżmy, że 3 osoby mają wykonać 8 projektów. Znajdź przypisanie osób do projektów przy założeniu, że każda musi wykonywać 2 lub 3 projekty, i żaden projekt nie jest podzielony pomiędzy pracowników. Twoim celem jest znalezienie takiego przypisania, przy którym ostatni z projektów zostanie ukończony najwcześniej, jak to możliwe (każda osoba wykonuje przypisane sobie projekty jeden po drugim – nie może ich wykonywać jednocześnie), jeśli czasy wykonania poszczególnych projektów przez poszczególne osoby zadane są w tabeli:

	Osoba A	Osoba B	Osoba C
Projekt 1	13	11	8
Projekt 2	19	20	7
Projekt 3	12	15	19
Projekt 4	11	12	9
Projekt 5	10	16	14
Projekt 6	22	24	19
Projekt 7	11	12	10
Projekt 8	9	7	10

Zrób to, tworząc odpowiedni program całkowitoliczbowy.

- LP18. ([JKSW11]) Trzy rodzaje koparek może wykonywać cztery rodzaje prac ziemnych. W tabeli podano wydajności koparek przy wykonywaniu tych prac (w m^3 na dzień), liczby koparek, jakimi dziennie dysponuje przedsiębiorstwo, oraz planowe dzienne zapotrzebowanie w zakresie poszczególnych prac (w m^3):

Typ koparki	Wyd. przy wyk. zad. typu I	Wyd. przy wyk. zad. typu II	Wyd. przy wyk. zad. typu III	Wyd. przy wyk. zad. typu IV	Liczba koparek do dyspozycji
A	25	15	16	20	10
B	30	10	24	25	8
C	24	18	25	27.5	15
Zapotrz.	220	90	146	220	

Przydziel koparki do wykonywania poszczególnych prac ziemnych tak, aby dzienne koszty ich eksploatacji były możliwie najniższe, wiedząc, że dzienne koszty eksploatacji koparek typów A, B i C wynoszą odpowiednio 190PLN, 130PLN oraz 280PLN. Zrób to, rozwiązując odpowiednie zadanie programowania całkowitoliczbowego.

- LP19. (na podstawie [JKSW11]) Przedsiębiorstwo zrzesza 8 zakładów, z których każdy może z niejednakową wydajnością produkować pięć wyrobów. W tabeli poniżej podano wydajności zakładów przy wytwarzaniu poszczególnych wyrobów (w setkach sztuk na godzinę):

Zakład	Wyrób I	Wyrób II	Wyrób III	Wyrób IV	Wyrób V
1	4	3	7	12	3
2	5	2	6	9	7
3	2	5	8	1	9
4	6	4	8	8	6
5	4	6	9	7	2
6	3	2	4	5	6
7	1	4	5	4	2
8	7	9	3	2	5

Biorąc pod uwagę konieczność specjalizacji każdego zakładu w produkcji jednego tylko wyrobu, przydziel zakłady do produkcji poszczególnych wyrobów w taki sposób, aby każdy wyrób był produkowany w co najmniej jednym zakładzie, a zysk z produkcji był jak największy. Zakładamy, że zyski z produkcji pojedynczego egzemplarza każdego z produktów wynoszą odpowiednio: 1.2, 2.3, 1.5, 0.8 i 2PLN. Wykorzystaj do tego odpowiednio skonstruowane zadanie programowania całkowitoliczbowego.

Literatura:

[JKSW11] Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, wyd. 6, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.

- [LP05] J.A. Lawrence, B.A. Pasternack, Applied Management Science: Modeling, Spreadsheet Analysis, and Communication for Decision Making, 2nd Ed., California State University, Fullerton, 2005
- [MK80] C.K. McKenna, Quantitative Methods for Public Decision Making, 1st Ed., McGraw-Hill College, 1980
- [NPTEL14] Kurs online Operations Research Applications – Linear and Integer Programming. <https://nptel.ac.in/courses/110/106/110106059>