Teoria i metody optymalizacji

Miniprojekty (programowanie nieliniowe)

NLP1. (Oparte na [JKSW11]) Trzy cukrownie prowadzą kampanię cukrowniczą, mając za zadanie przerobienie łącznie 37560t buraków. Dzienny przerób poszczególnych cukrowni wynosi odpowiednio 120t, 160t i 180t buraków. Wiadomo, że w trakcie kampanii cukrowniczej powstają straty zależne od czasu składowania buraków, które można opisać funkcją

$$f(t_1, t_2, t_3) = 0.6t_1^2 + 12t_1 + 0.3t_2^2 + 9t_2 + 0.4t_3^2 + 15t_3,$$

gdzie t_i, $i = 1, 2, 3$ to czas (w dniach) trwania kampanii w i-te cukrowni. Rozwiązując odpowiednie zadanie optymalizacyjne odpowiedz, jak rozdzielić buraki pomiędzy cukrownie tak, żeby wszystkie buraki zostały przerobione, a straty cukru były jak najmniejsze. Wartości t_i nie muszą być całkowite.

NLP2. (Oparte na [JKSW11]) Cztery wyroby A, B, C i D produkowane są z tych samych dwóch surowców. Zapas 1. surowca to 12000t. Zapas 2. surowca to 15000t. Wiadomo, że na 1 tys. sztuk wyrobu A zużywa się 2t surowca 1. i 1.5t surowca 2., na 1 tys. sztuk wyrobu B zużywa się 1t surowca 1. i 2.5t surowca 2., na 1 tys. sztuk wyrobu C zużywa się 5t surowca 1. i 2t surowca 2.., natomiast na 1 tys. sztuk wyrobu D – 1t surowca A i 1.5t surowca B. Ustalić wielkość produkcji, jeśli chcemy wykorzystać cały zapas obu surowców, maksymalizując przy tym zysk ze sprzedaży 4 produktów, zdefiniowany funkcją

$$f(x_A, x_B, x_C, x_D) = 3x_A + 3.5x_B + 8x_C + 2x_D - 0.0005x_A^2 - 0.0012x_B^2 - 0.0008x_C^2 - 0.0001x_D^2,$$

gdzie x_i to całkowita produkcja wyrobu i.

Zadanie rozwiąż, tworząc odpowiedni problem optymalizacyjny. Nie przejmuj się tym, że wartości zmiennych x_i mogą nie być całkowite.

NLP3. (Oparte na [JKSW11]) Planowane są prace modernizacyjne w czterech kopalniach. Rezultatem tych prac ma być łącznie 15000t przyrostu wydobycia. Koszty prac modernizacyjnych w zależności od planowanego przyrostu wydobycia w poszczególnych kopalniach (odpowiednio x_1, x_2, x_3 i x_4) wyraża funkcja

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.1x_1^2 + 0.03x_2^2 + 0.05x_3^2 + 0.02x_4^2 + 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 20x_4.$$

Zaplanuj wielkości przyrostu wydobycia dla poszczególnych kopalń tak, aby koszty prac modernizacyjnych były możliwie najmniejsze. Pamiętaj o tym, że wielkości $x_1, \ldots, x_4$ muszą być nieujemne.

NLP4. (Oparte na [MOR17]) Rozważmy 3 firmy należące do jednej korporacji. Każda z firm wytwarza pewien produkt i woda jest potrzebna do jego produkcji. Załóżmy, że zapotrzebowanie poszczególnych firm na wodę w kilolitrach na godzinę oznaczymy przez $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$. Ponieważ woda jest najbardziej deficytowym z surowców stosowanych w produkcji, możemy przyjąć, że zysk z produkcji, $B_i(x_i)$, zależy głównie od wartości x_i. Określony jest on następującymi wzorami:

$$B_1(x_1) = -x_1^2 + 16x_1,$$
$$B_2(x_2) = -2.5x_2^2 + 9x_2,$$
$$B_3(x_3) = -1.5x_3^2 + 11x_3.$$

Dostępność wody oszacowano na 10kl/h. Firmy mają zawarte kontrakty na sprzedaż swoich produktów, które wymagają wytworzenia co najmniej 100 jednostek produktu 1 oraz co najmniej 250 jednostek jednego z produktów 2 lub 3, co oznacza, że x_1 musi być równe co najmniej 1kl/h, a $x_2 + x_3$ co najmniej 4.25kl/h. Znajdź wartości zmiennych x_1, x_2 i x_3, które maksymalizują całkowity zysk korporacji przy uwzględnieniu wszystkich wymienionych ograniczeń.

NLP5. Stacja orbitalna ma zostać umiejscowiona w punkcie na orbicie okołoziemskiej, którą można opisać układem równań

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 20x + 60y + 12z = 6000 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

przy czym środkiem układu współrzędnych jest Ziemia. Komunikacja pomiędzy stacją a Ziemią ma być monitorowana przez satelitę, którego pozycja na orbicie jest ustalona: $(x_S, y_S, z_S) = (29, 45, -11)$. Ustalono, że koszty komunikacji pomiędzy stacją a Ziemią oraz monitorowania jej przez satelitę będą proporcjonalne do sumy

$$D = 5d_1 + d_2 + d_3,$$

gdzie d_1 jest odległością pomiędzy stacją a Ziemią, d_2 – odległością między stacją a satelitą, a d_3 – odległością między satelitą a Ziemią. Znajdź położenie, w którym umiejscowiona powinna być stacja orbitalna, dla którego D będzie najmniejsza możliwa.

NLP6. Sieć supermarketów budowlanych chce ustalić miejsce, w którym powinna wybudować centrum dystrybucyjne dla swoich sklepów. Znane są lokalizacje supermarketów (x_i, y_i), $i = 1, \dots, 8$ oraz ilości artykułów (w liczbie potrzebnych dostaw) sprzedawanych w każdym z nich w_i, $i = 1, \dots, 8$, a także lokalizacje dwóch fabryk, w których wytwarzane są materiały budowlane na potrzeby sieci (x_i^P, y_i^P), $i = 1, 2$. Znajdź najlepszą lokalizację centrum dystrybucyjnego (x_0, y_0), przy założeniu, że ma ona minimalizować ważoną sumę odległości sklepów od centrum dystrybucyjnego (w_i są tu wagami), jednocześnie zachowując odległość od każdej z fabryk poniżej 200(km). Dane (w km) podane są w tabeli:

Nr supermarketu	x_i	y_i	w_i
1	-19	65	4200
2	37	180	2100
3	149	10	1500
4	87	235	6500
5	-52	-12	4000
6	10	-64	1200
7	25	-11	1500
8	45	-121	3000

Nr fabryki	x_i^P	y_i^P
1	36	60
2	-28	20

NLP7. Sieć supermarketów budowlanych chce ustalić miejsce, w którym powinna wybudować centrum dystrybucyjne dla swoich sklepów. Znane są lokalizacje supermarketów (x_i, y_i), $i = 1, \dots, 8$ oraz ilości artykułów (w liczbie potrzebnych dostaw) sprzedawanych w każdym z nich w_i, $i = 1, \dots, 8$, a także lokalizacje dwóch fabryk, w których wytwarzane są materiały budowlane na potrzeby sieci (x_i^P, y_i^P), $i = 1, 2$. Znajdź najlepszą lokalizację centrum dystrybucyjnego (x_0, y_0), przy założeniu, że ma ona minimalizować ważoną sumę odległości sklepów od centrum dystrybucyjnego (w_i są tu wagami), jednocześnie zachowując sumę odległości od każdej z fabryk poniżej 200(km). Dane (w km) podane są w tabeli:

Nr supermarketu	x_i	y_i	w_i
1	-19	65	4200
2	37	180	2100
3	149	10	1500
4	87	235	6500
5	-52	-12	4000
6	10	-64	1200
7	25	-11	1500
8	45	-121	3000

Nr fabryki	x_i^P	y_i^P
1	36	60
2	-28	20

NLP8. Pewna firma telekomunikacyjna chce ustalić położenie stacji przekaźnikowej. Stacja ma pokrywać obszar w okolicy Cincinnati. Dane w tabelce określają położenie głównych miast, które powinny znaleźć się w zasięgu stacji (w milach na siatce północ-południe/wschód-zachód)

Miasto	x_i	y_i
Cincinnati	17	14
Florence	10	10
Covington	12	16
Evendale	12	22
Fairfax	13	17
Milford	19	19

Jakość transmisji zależy głównie od odległości pomiędzy stacją a telefonem, w związku z tym firma planuje postawić stację przekaźnikową w miejscu, w którym największa odległość pomiędzy stacją a którymkolwiek z wymienionych miast jest zminimalizowana. Zrobić to można (i należy), minimalizując zmienną z (odległość) przy ograniczeniach postaci

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \leqslant z^2, \quad i = 1, \ldots 6,$$

gdzie (x, y) to położenie stacji. Zapisz i rozwiąż ten problem.

NLP9. (Oparte na [JKSW11]) Jak rozdzielić dzienną produkcję energii 100MWh pomiędzy 3 elektrownie, tak aby dzienne koszty zużycia paliwa opisane funkcją

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.1(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 26(x_1 + x_2 + x_3),$$

gdzie x_i, $i = 1, 2, 3$ to dzienne zużycie paliwa w elektrowni i, były możliwie najniższe. Weź pod uwagę, że z 1t paliwa w elektrowni I uzyskuje się 5MWh energii, w elektrowni II – 3MWh, a w elektrowni III – 4MWh. Dodatkowo musisz pod uwagę wziąć, że każda elektrownia ma swoje ograniczenia jeśli chodzi o maksymalną produkcję energii. W przypadku elektrowni I jest to 50MWh, a w przypadku elektrowni II i III po 40mWh.

Na pytanie odpowiedz, tworząc odpowiedni problem optymalizacji nieliniowej.

NLP10. (Oparte na [Wi80]) Dzienny koszt produkcji energii w pewnej elektrowni zadany jest wzorem

$$\sum_{i=1}^{2} c_i x_i + \sum_{i=1}^{2} d_i x_i^2,$$

gdzie $c_1 = 7.5$, $c_2 = 4.4$, $d_1 = 13.6$ oraz $d_2 = 1.9$ są znanymi współczynnikami, a x_1 i x_2 oznaczają energię (w MW) wytwarzaną przez (odpowiednio) 1. i 2. blok elektrowni.

W trakcie transmisji powstają straty postaci

$$P_L = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} H_{ij} x_i x_j,$$

gdzie wartości H_{ij} zadane są macierzą $H = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 24 \end{bmatrix} \times 10^{-7}$.

Dodatkowo należy wziąć pod uwagę zakres, w jakim może funkcjonować każdy z bloków:

$$5000 \leqslant x_1 \leqslant 16000, \quad 8000 \leqslant x_2 \leqslant 20000$$

Znajdź wartości x_1 i x_2 tak, aby wytworzona energia minus powstałe straty $x_1 + x_2 - P_L$ była największa możliwa. Uwzględnij podane wyżej ograniczenia na x_1 i x_2, a także ograniczenie na koszty wytworzenia energii postaci

$$\sum_{i=1}^{2} c_i x_i + \sum_{i=1}^{2} d_i x_i^2 \leqslant 7 \times 10^7.$$

NLP11. Ilość danych przesłanych przez pewne urządzenie mobilne korzystające z trzech kanałów $k \in \{1, 2, 3\}$ może być policzona przy pomocy wzoru:

$$T(p^1, p^2, p^3) = \sum_{k=1}^{3} \log_2 \left(1 + \frac{p^k h^k}{I_k}\right),$$

gdzie $p^k \geqslant 0$, $k = 1, 2, 3$, są mocami, z jakimi urządzenie transmituje na kanałach k, $h^k \in \mathbb{R}^+$, $k = 1, 2, 3$ są indykatorami jakości kanałów, natomiast $I_k \in \mathbb{R}^+$, $k = 1, 2, 3$ to wartości interferencji na poszczególnych kanałach.

Napisz program pozwalający na zmaksymalizowanie całkowitego przesyłu danych pod warunkiem, że $p^1 + p^2 + p^3 = 1mW$. Przyjmij, że wartości h_k oraz I_k, $k = 1, 2, 3$ są zadane tabelą:

Channel	h_k	I_k
1	0.752	1.23
2	0.363	3.88
3	0.618	2.19

NLP12. (Oparte na [BM68]) Zmiennymi, których wartości masz określić x_{ij} ($i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2$), są ilości broni i przydzielonych de celów j. Prawdopodobieństwa a_{ij}, że cel j nie zostanie uszkodzony w przypadku ataku pojedynczą sztuką broni typu i zadane są w tabeli:

	w. 1	w. 2	w. 3
t. 1	0.35	0.97	0.76
t. 2	0.55	0.89	0.85

Twoim celem jest dobranie ilości broni do celów w taki sposób, żeby suma prawdopodobieństw, że każdy z celów zostanie zniszczony

$$\sum_{j=1}^{2} \left[1 - \Pi_{i=1}^{3} a_{ij}^{x_{ij}}\right],$$

była jak największa. Pod uwagę musisz wziąć ograniczenia na ilość broni użytej do ataku na poszczególne cele postaci

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \leqslant 20, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leqslant 40, \quad j = 1, 2$$

oraz ograniczenia dotyczące nieujemności wszystkich zmiennych.

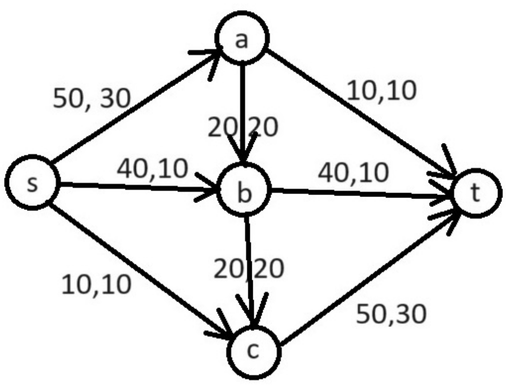
NLP13. Rzeczywisty koszt paliwa przesyłanego z krajów arabskich drogą morską do Japonii został oszacowany w pracy [U68] jako suma kosztu ropy naftowej, ubezpieczenia, cła, kosztu przewozu, kosztów załadunku i wyładunku, opłat za cumowanie, kosztów składowania paliwa oraz jego rafinacji:

$$\begin{aligned} c &= c_c + c_i + c_x + \frac{2.09 \times 10^4 t^{-0.3017} + 5.042 \times 10^3 q^{-0.1899} + 0.1049 q^{0.671}}{360} \\ &+ \frac{1.064 \times 10^6 a t^{0.4925} + 4.242 \times 10^4 a t^{0.7952} + 1.813 i p (nt + 1.2q)^{0.861} + 4.25 \times 10^3 a (nt + 1.2q)}{52.47 q (360)}, \end{aligned}$$

gdzie a to procent stałych opłat, c_c – cena ropy naftowej (w $\$/kl$), c_i – ubezpieczenie (w $\$/kl$), c_x – cło (w $\$/kl$), i – stopa procentowa wolna od ryzyka, n – liczba portów, p – opłata za zajęcie obszaru na zbiorniki paliwa (w $\$/m^2$), q – przepustowość rafinerii (w bbl/dzień), a t – ładowność tankowca (w kl). Znajdź minimum powyższego kosztu jako funkcji ładowności tankowca t oraz przepustowaości rafinerii q. Pozostałe dane zadane są tabelą

a	c_c	c_i	c_x	i	n	p
0.20	12.5	0.5	0.9	0.1	2	7000

NLP14. Załóżmy, że masz zadaną sieć komunikacyjną jak na rysunku:



Chcesz ustalić, jak dużo samochodów jadących z punktu s do t powinno wybrać poszczególne drogi. Twoim celem jest minimalizacja średniego czasu podróży. Dla każdego połączenia (i, j), podane są dwie wielkości: minimalny czas przejazdu $t_{ij}^{\min}$ (w minutach; pierwsza liczba) oraz parametr funkcji czasu przejazdu c_{ij} (druga liczba). Czas przejazdu na odcinku (i, j) zależy od liczby (podanej w tysiącach) samochodów jadących tym odcnkiem x_{ij} zgodnie ze wzorem

$$t_{ij}(x_{ij}) = t_{ij}^{\min} + 5 \frac{x_{ij}^2}{c_{ij}}.$$

Twoim celem jest zatem znalezienie minimum funkcji zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \sum_{(i,j)} t_{ij}(x_{ij})x_{ij}$$

pod warunkiem, że $x_{ij} \geqslant$ dla każdego łuku (i, j) oraz przy zachowaniu przepływu przez każdy węzeł (to, co do niego wchodzi, musi z niego wyjść). Załóżmy, że z s do t ma przejechać 16000 samochodów.

Rozwiązując problem, nie przejmuj się tym, że liczby samochodów mogą nie wyjść całkowite.

NLP15. Pewna firma zajmująca się wytwarzaniem sprzętu do gry w golfa planuje wprowadzić na rynek 2 typy toreb golfowych: Torbę Standard i Torbę Deluxe i chce ustalić, ile którego typu powinna produkować. Produkcja torby wymaga wykonania następujących czynności: cięcie i farbowanie materiału, szycie, wykańczanie oraz kontrola jakości i pakowanie. Czasy potrzebne na wykonanie każdej z tych czynności (w godzinach) zadane są tabelką:

Czynność	Torba Standard	Torba Deluxe
Cięcie i farbowanie	0.7	1
Szycie	0.5	0.85
Wykończenie	1	0.65
Kontrola i pakowanie	0.1	0.25

Analiza zatrudnienia w poszczególnych działach firmy wykazała, że w najbliższych 3 miesiącach do rozdysponowania jest 630 godzin na cięcie i farbowanie, 600 na szycie, 708 na wykańczanie oraz 135 na kontrolę i pakowanie. Z kolei analiza kosztów związanych z wyprodukowaniem poszczególnych toreb oraz sytuacją na rynku umożliwiła podanie przybliżonego zysku z produkcji i sprzedaży toreb każdego z typów: w przypadku Toreb Standard zysk z produkcji S toreb będzie równy $80S - 0.1S^2$ (PLN), natomiast zysk ze sprzedaży D Toreb Deluxe wynosić będzie $15D - 0.2D^2$. Ile toreb którego typu powinno być produkowane, aby zmaksymalizować zysk przedsiębiorstwa przy uwzględnieniu ograniczeń na czas pracy poszczególnych działów (oraz na to, że $D \geqslant 0$, $S \geqslant 0$).

NLP16. (Oparte na [JKSW11]) Załóżmy, że liczba ton produktu sprzedawanego przez pewne przedsiębiorstwo y zależy od 3 czynników produkcji: liczby roboczogodzin wykorzystanych do jego produkcji t, ilości surowców potrzebnych do jego produkcji x oraz liczby (w tysiącach PLN) pieniędzy zainwestowanych w jego promocję p. Liczba ta w przybliżeniu zadana jest wzorem

$$y(t, x, p) = 0.2p^2 + 0.05t^2 - 0.04tx + 5t + 10x.$$

Koszt firmy związany z zatrudnieniem pracowników oszacowano na $600t$ PLN, natomiast koszty surowców na $1600x$ PLN. Produkt jest sprzedawany w cenie 250PLN za tonę. Zysk firmy jest zatem równy

$$f(t, x, p) = 0.25y(t, x, p) - p - 0.6t - 1.6x.$$

Znajdź wartości t, x oraz p maksymalizujące zysk firmy przy uwzględnieniem następujących ograniczeń:

- Liczba dostępnych na rynku pracowników oraz ilość surowców są ograniczone: $t \leqslant 2400$, a $x \leqslant 5200$.
- Twoje fundusze są również ograniczone, czyli $p + 0.6t + 1.6x \leqslant 4000$.
- Każda ze zmiennych musi mieć wartość nieujemną.

NLP17. (Oparte na [JKSW11]) Przedsiębiorstwo Plastex zajmuje się wytwarzaniem pojedynczego produktu, którego ilość w tonach y zależna jest od 3 czynników produkcji x_1, x_2 i x_3 w następujący sposób:

$$y = 1.5x_1^{0.75}x_2^{0.5}x_3^{0.8}.$$

Ogólne koszty produkcji zadane są natomiast równaniem

$$C(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 50$$

Rozwiązując odpowiedni problem optymalizacyjny, wyznaczyć optymalne wartości czynników produkcji $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant$ i $x_3 \geqslant 0$, przy których koszt produkcji $y = 500$t produktu będzie najniższy.

NLP18. (Oparte na [BM68]) Standardowym celem, jaki stawiamy sobie rozwiązując zadania regresji liniowej jest minimalizacja błędu średniokwadratowego (co można wykonać na różne sposoby). W pewnych sytuacjach bardziej sensowne wydaje się zastosowanie innego podejścia. Możemy na przykład szukać rozwiązania, które będzie minimalizowało sumę p-tych potęg błędów:

$$\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^p, \tag{1}$$

gdzie

$$\alpha_i = x_{i1}b_1 + \ldots + x_{in}b_n - y_i, \quad \text{dla } i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

przy czym $x_{i1}, \ldots, x_{in}$, $i = 1, \ldots, m$ są znanymi wartościami pewnych pomiarów, a $b_1, \ldots, b_n$ są współczynnikami, których szukamy.

Jeśli mają one minimalizować (1) przy ograniczeniach (2), a p jest nieparzyste, problem możemy zapisać następująco:

$$\text{zminimalizuj} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^p$$

przy ograniczeniach

$$-y_i + x_{i1}b_1 + \ldots + x_{in}b_n + \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$y_i - (x_{i1}b_1 + \ldots + x_{in}b_n) + \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

Rozwiąż tak sformułowany problem dla $p = 3$ oraz danych z tabeli

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
1	99	1	8.5	106
2	89	1	8.2	72
3	103	2	9.5	75
4	86	1	7.4	99
5	91	1	7.0	165
6	95	1	8.0	180
7	100	1	9.5	99
8	135	2	12.3	210
9	112	2	10.8	175
10	81	1	7.0	120
11	89	1	8.2	132
12	97	1	9.0	157
13	113	1	15.7	75
14	51	0.5	3.7	80
15	75	1	6.2	105
16	98	1	10.6	205
17	100	2	11.4	109
18	94	2	7.1	90
19	121	2	13.0	87
20	39	0.5	3.4	150

NLP19. (Oparte na [BM68]) Standardowym celem, jaki stawiamy sobie rozwiązując zadania regresji liniowej jest minimalizacja błędu średniokwadratowego (co można wykonać na różne sposoby). W pewnych sytuacjach bardziej sensowne wydaje się zastosowanie innego podejścia. Załóżmy, że związek między zmiennymi x_{ij} a y_i, $i = 1, \ldots, m$ zadany jest w przybliżeniu wzorem:

$$y_i \approx b_0 + b_1 e^{x_{i1}} + \ldots + b_n e^{x_{in}}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

dla którego chcemy znaleźć współczynniki b_0, b_1,…,b_n. Aby to zrobić, dla zadanych wartości $x_{i1}, \ldots, x_{in}$, $i = 1, \ldots, m$ szukamy $b_0, \ldots, b_n$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ minimalizujących

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$$

przy ograniczeniach

$$-y_i + b_0 + b_1 e^{x_{i1}} + \ldots + b_n e^{x_{in}} + \alpha_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Rozwiąż tak postawiony problem dla danych z poprzedniego ćwiczenia.

Literatura:

[BM68] J. Bracken, G.P. McCormick, Selected Applications of Nonlinear Proframming, John Wiley & Sons, Inc., 1968

[JKSW11] Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, wyd. 6, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.

[MOR17] M. Or Rashid, Optimization of Non-Linear Programming Problem and its Application in Mathematical Modelling, M.Phil. Thesis, University of Chittagong, 2017

[U68] T. Uchiyama, Best Size for Refinery and Tankers. Hydrocarbon Process. 47(12) 85–88 (1968)

[Wi80] R. Wiebking, Selected Applications of All-Quadratic Programming, OR Spektrum 1, 243–249, 1980