Analiza Matematyczna

Przykłady: **Całki niewłaściwe.**

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **10.1**:

Korzystając z definicji zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{T\to\infty} \int_1^{T} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{T\to\infty} (\mathrm{arctg} T - \mathrm{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
- Wniosek: badana całka jest zbieżna.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{(x+1)^{2/3}}{2/3} + C,\ C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{T\to-\infty} \int_T^{-9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{T\to-\infty} \left(\frac{(-9+1)^{2/3}}{2/3} - \frac{(T+1)^{2/3}}{2/3} \right) = -6 - \infty = -\infty$
- Wniosek: badana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

(c) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \sin x\, dx$

- $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \sin x\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_{\pi}^{T} \sin x\, dx = \lim_{T\to\infty} (-\cos T + \cos \pi)$
  - granica nie istnieje, bo dla $T_n' = 2n\pi \to \infty$ mamy $-\cos T_n' - 1 = -2 \to -2$,
  a dla $T_n'' = \pi + 2n\pi \to \infty$ mamy $-\cos T_n'' - 1 = 0 \to 0 \neq -2$.
- Wniosek: badana całka jest rozbieżna.

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\, dx$

- $\displaystyle\int e^{-2x}\, dx = -\frac{e^{-2x}}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2x}\, dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}\, dx = \infty + \frac{1}{2} = \infty$

  Obliczenia pomocnicze:
- $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2x}\, dx = \lim_{T \to -\infty} \int\limits_{T}^{0} e^{-2x}\, dx = \lim_{T \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{-2T}}{2} \right) = \infty$

  całka rozbieżna do ∞
- $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}\, dx = \lim_{T \to \infty} \int\limits_{0}^{T} e^{-2x}\, dx = \lim_{T \to \infty} \left(-\frac{e^{-2T}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

  całka zbieżna
- Wniosek: badana całka jest rozbieżna do ∞.

Przykład **10.2**:

Korzystając z definicji zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych drugiego rodzaju

(a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{e} \ln x\, dx$

- $\displaystyle\int \ln x\, dx = \left[\begin{array}{ll} f = \ln x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = \int 1 dx = x \end{array} \right] = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx =$

  $\displaystyle= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C,\ C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int\limits_{0}^{e} \ln x\, dx = \lim_{T \to 0+} \int\limits_{T}^{e} \ln x\, dx = \lim_{T \to 0+} (e(\ln e - 1) - T(\ln T - 1)) = \lim_{T \to 0+} T(1 - \ln T) =$

  $\displaystyle= [0 \cdot \infty] = \lim_{T \to 0+} \frac{1 - \ln T}{\left(\frac{1}{T}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{T \to 0+} \frac{-\frac{1}{T}}{-\frac{1}{T^2}} = \lim_{T \to 0+} T = 0$
- Wniosek: badana całka jest zbieżna.

(b) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-2)^2}$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2} = -(x-2)^{-1} + C,\ C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{T \to 2-} \int\limits_{1}^{T} \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{T \to 2-} \left(-\frac{1}{T-2} + \frac{1}{1-2} \right) = -\frac{1}{0-} - 1 = \infty$
- Wniosek: badana całka jest rozbieżna do ∞.

Przykład **10.3**:

Korzystając z kryterium porównawczego lub ilorazowego zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego i drugiego rodzaju

(a) $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$

- hipoteza: całka rozbieżna do ∞, bo całkowana funkcja jest bliska $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $p = 1/2 < 1$
- $0 \leqslant f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = g(x)$ dla $x \geqslant 4$
- całka $\displaystyle\int_4^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest rozbieżna do ∞,

  bo jest to całka typu $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$ z $p = \frac{1}{2} < 1$
- Wniosek: Z kryterium porównawczego badana całka jest także rozbieżna.

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + x}$

- hipoteza: całka zbieżna, bo całkowana funkcja jest bliska $\dfrac{1}{e^x}$
- $0 \leqslant f(x) = \dfrac{1}{e^x + x} \leqslant \dfrac{1}{e^x} = e^{-x} = g(x)$ dla $x \geqslant 0$
- całka $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}(-e^{-T}+1) = 1$ jest zbieżna
- Wniosek: Z kryterium porównawczego badana całka jest także zbieżna.

(c) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^6 - 10x}}$

- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^6 - 10x}} = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{1 - \frac{10}{x^5}}} > 0$ dla $x \geqslant 3$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt[3]{1-\frac{10}{x^5}}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{10}{x^5}}} = 1 = k > 0$ (czyli $g(x) = \dfrac{1}{x}$)
- $\displaystyle\int_3^{\infty} g(x)\,dx = \int_3^{\infty}\frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞ (bo $p = 1$)
- Wniosek: Z kryterium ilorazowego badana całka także jest rozbieżna do ∞.

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\pi} \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}$

- $f(x) = \dfrac{x}{x^3+\sin x} > 0$ dla $x \leqslant -\pi$
  ($x < 0$ oraz $x^3 + \sin x \leqslant x^3 + 1 < -\pi^3 + 1 < 0$)
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x^3+\sin x}}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^3}\sin x)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^3}\sin x} = 1 = k > 0,$
  bo $0 \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\sin x\right| \leqslant \frac{1}{|x|^3}$ i $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$, więc z tw. o trzech funkcjach $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}\sin x = 0$
  (czyli mamy $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\pi} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-\pi} \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna (bo $p = 2 > 1$)
- Wniosek: Z kryterium ilorazowego badana całka także jest zbieżna.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sin^2 x}\,dx$

- hipoteza: całka rozbieżna do ∞, bo całkowana funkcja jest bliska $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ dla x bliskich 0, a ta jest dla takich x bliska $\dfrac{1}{x^2}$, $p = 2 > 1$
- $0 \leqslant f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} \leqslant \dfrac{x+1}{\sin^2 x} = g(x)$ dla $0 < x \leqslant 1$
- całka $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{T\to 0+} \int_T^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{T\to0+} (-\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} T) = \infty$ jest rozbieżna do ∞
- Wniosek: Z kryterium porównawczego badana całka jest także rozbieżna do ∞.

(f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\ln(1+x)}$

- $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} > 0$ dla $0 < x \leqslant 2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{\ln(1+x)}}{g(x)} = \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{\ln(1+x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+} \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1 = k > 0$
  (czyli mamy $g(x) = \dfrac{1}{x}$)
- $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞ (bo $p = 1$)
- Wniosek: Z kryterium ilorazowego badana całka także jest rozbieżna do ∞.