Analiza Matematyczna

Przykłady:

Funkcje wielu zmiennych: dziedzina naturalna, wykres.

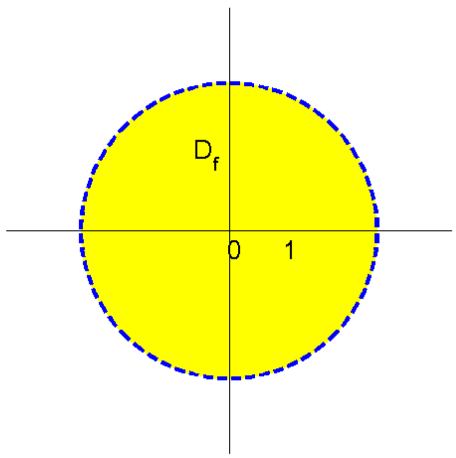
Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **13.1**:

Wyznacz i narysuj dziedzinę naturalną podanej funkcji.

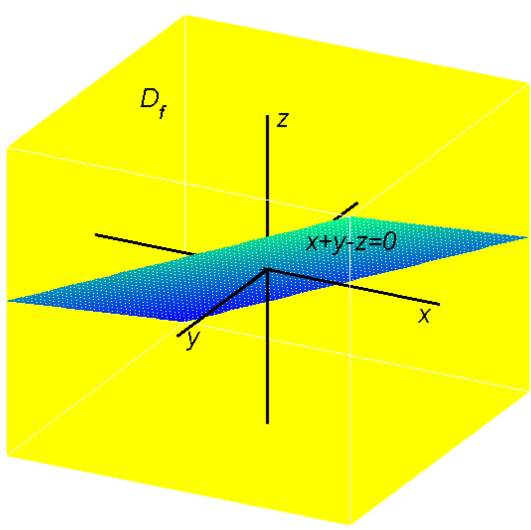
(a) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

- $D_f = \{(x,y) : 1 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$
  jest to koło otwarte (czyli bez brzegu) o środku $(0,0)$ i promieniu 1



(b) $f(x,y,z) = \dfrac{10}{e^{x+y-z} - 1}$

- $D_f = \{(x,y,z) : e^{x+y-z} - 1 \neq 0\} = \{(x,y,z) : x + y - z \neq 0\}$
  jest to przestrzeń $\mathbb{R}^3$ bez płaszczyzny o równaniu $x + y - z = 0$

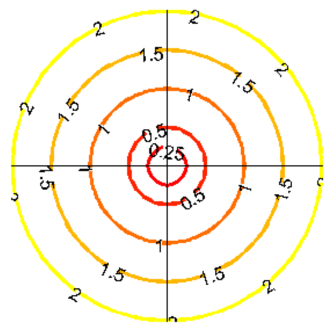


Przykłady $\boxed{\mathbf{13.2}}$:

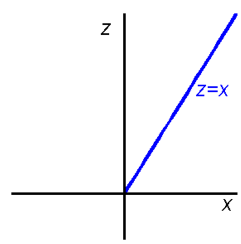
Znajdź dziedzinę naturalną oraz narysuj poziomice wykresu podanej funkcji i na tej podstawie naszkicuj ten wykres.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

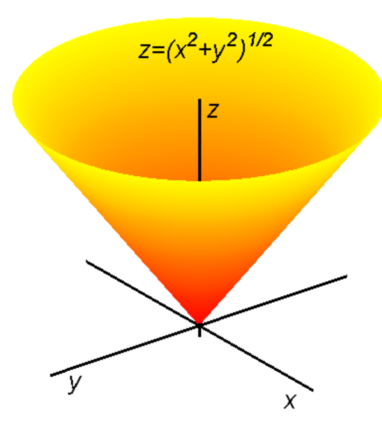
- $D_f = \mathbb{R}^2$
- Poziomice $P_h = \{(x, y) : f(x, y) = h\}$ to:
  $P_h = \emptyset$ dla $h < 0$
  $P_0 = \{(0, 0)\}$
  $P_h = \{(x, y) : x^2 + y^2 = h^2\}$ dla $h > 0$, czyli okręgi o wspólnym środku $(0, 0)$ i promieniach równych h



- Wynika stąd, że wykres badanej funkcji to powierzchnia obrotowa, gdzie obracamy wokół osi Oz funkcję $z = f(x, 0) = \sqrt{x^2} = x$ dla $x \geqslant 0$

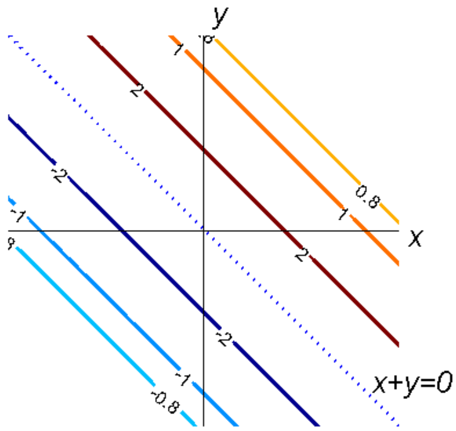


- Otrzymujemy stożek

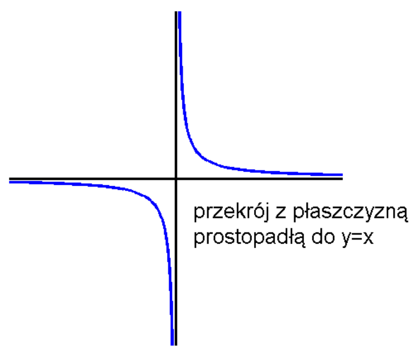


(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

- $D_f = \{(x,y) : x+y \neq 0\}$ - płaszczyzna bez prostej $x+y=0$
- Poziomice $P_h = \{(x,y) : f(x,y) = h\}$ to:
  $P_h = \emptyset$ dla $h = 0$
  $P_h = \{(x,y) : x+y = \dfrac{1}{h}\}$ dla $h \neq 0$, czyli proste równoległe do prostej $x+y=0$



- Wynika stąd, że wykres badanej funkcji to powierzchnia walcowa (w dwóch częściach, bo przerwa w dziedzinie) o przekroju hiperboli



- Otrzymujemy wykres