Analiza Matematyczna

Przykłady:

Funkcje wielu zmiennych: płaszczyzna styczna do wykresu, różniczka, pochodne kierunkowe.

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **15.1**:

Napisz równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, -1, f(1,-1))$

- $z_0 = f(1,-1) = 2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$
- obie pochodne są ciągłe w $(1,-1)$,
  zatem istnieje płaszczyzna styczna do wykresu f w punkcie $(1,-1,2)$
- Równanie tej płaszczyzny ma postać:

  $\pi_{st} : z - 2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) \cdot (x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \cdot (y-(-1))$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -2$

  Zatem $\pi_{st} : z - 2 = 2(x-1) - 2(y+1)$

(b) $f(x,y) = x^y, \quad (x_0, y_0, z_0) = (2, 4, f(2,4))$

- $z_0 = f(2,4) = 16$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$
- obie pochodne są ciągłe w $(2,4)$,
  zatem istnieje płaszczyzna styczna do wykresu f w punkcie $(2,4,16)$
- Równanie tej płaszczyzny ma postać:

  $\pi_{st} : z - 16 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,4) \cdot (x-2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,4) \cdot (y-4)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,4) = 4 \cdot 2^3 = 32$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,4) = 2^4 \ln 2 = 16 \ln 2$

  Zatem $\pi_{st} : z - 16 = 32(x-2) + 16\ln 2(y-4)$

Przykłady **15.2**:

Wykorzystując różniczkę funkcji oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:

(a) $(1.02)^4 \cdot (0.97)^2$

- $f(x,y) = x^4y^2$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = -0.03$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^4y$
- obie pochodne są ciągłe w $(1,1)$, uzasadnione jest zatem użycie różniczki dla uzyskania przybliżonej wartości $f(1.02, 0.97)$
- $f(1.02, 0.97) \approx f(1,1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) \cdot 0.02 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) \cdot (-0.03)$
- $f(1,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$

  Zatem $(1.02)^4 \cdot (0.97)^2 \approx 1 + 4 \cdot 0.02 + 2 \cdot (-0.03) = 1.02$

(b) $(\sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{17})^2$

- $f(x,y,z) = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$, $(x_0,y_0,z_0) = (4,9,16)$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = -1$, $\Delta z = 1$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$,
  $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$
- wszystkie pochodne są ciągłe w $(4,9,16)$, uzasadnione jest zatem użycie różniczki dla uzyskania przybliżonej wartości $f(5,8,17)$
- $f(5,8,17) \approx f(4,9,16) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(4,9,16) \cdot 1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(4,9,16) \cdot (-1) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(4,9,16) \cdot 1$
- $f(4,9,16) = (2+3+4)^2 = 81$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(4,9,16) = 2(2+3+4) \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 2} = 4.5$,
  $\dfrac{\partial f}{\partial y}(4,9,16) = 2(2+3+4) \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 3} = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(4,9,16) = 2(2+3+4) \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 4} = 2.25$

  Zatem $(\sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{17})^2 \approx 81 + 4.5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2.25 \cdot 1 = 84.75$

Przykłady **15.3**:

Oblicz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = (x+2y)^2$, $(x_0,y_0) = (1,2)$, $\vec{\mathbf{v}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

I sposób:

- Z definicji pochodnej kierunkowej:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(1,2) = \lim_{t \to 0+} \frac{f\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1,2)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 - 25}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0+} \frac{\left(5 + t\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 5^2}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{t\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(10 + t\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(10 + t\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 15\sqrt{2}$$

II sposób (prostszy):

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+2y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+2y)\cdot 2$
- pochodne te są ciągłe w $(1,2)$, zatem
  $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(1,2) = \mathbf{grad} f(1,2) \circ \vec{\mathbf{v}}$
- $\mathbf{grad} f(1,2) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = (2(1+4), 4(1+4)) = (10,20)$
- Zatem $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(1,2) = (10,20) \circ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 20 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\vec{\mathbf{v}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- Z definicji pochodnej kierunkowej:
  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(0,0) = \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(0+t\frac{\sqrt{2}}{2}, 0+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sqrt{\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}} - 0}{t} =$$
  $$= \lim_{t\to 0+} \sqrt{\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
- *Uwaga: Tutaj nie można wykorzystać II sposobu.* 🤨

(c) $f(x,y,z) = xy+yz+xz$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,-2,1)$, $\vec{\mathbf{v}} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y+z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x+z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y+x$
- pochodne te są ciągłe w $(1,-2,1)$, zatem
  $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(1,-2,1) = \mathbf{grad} f(1,-2,1) \circ \vec{\mathbf{v}}$
- $\mathbf{grad} f(1,-2,1) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2,1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2,1), \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,-2,1)\right) = (-2+1, 1+1, -2+1) =$
  $= (-1,2,-1)$
- Zatem $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(1,-2,1) = (-1,2,-1) \circ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} =$
  $= \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.