Analiza Matematyczna

Przykłady: **Funkcje wielu zmiennych: ekstrema.**

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **16.1**:

Znajdź ekstrema podanych funkcji:

(a) $f(x,y) = xy(1-x-y)$

- $D_f = \mathbb{R}^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-x-y) + xy\cdot(-1) = y(1-2x-y)$,

  $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-x-2y)$

  obie pochodne są ciągłe na $\mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2x-y) &= 0 \\ x(1-x-2y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y &= 0 \\ 1-x-2y &= 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x-y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x-y &= 0 \\ 1-x-2y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x &= \frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{3} \end{cases}$

  Zatem f może mieć ekstrema tylko w punktach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ i $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 1-2x-2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x$
- $\det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$

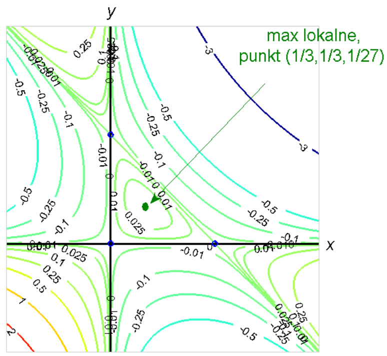
  Zatem f nie ma ekstremum w punkcie $(0,0)$
- $\det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$

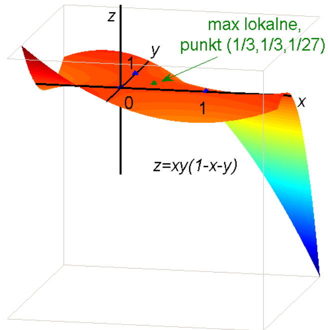
  Zatem f nie ma ekstremum w punkcie $(0,1)$
- $\det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -1 < 0$

  Zatem f nie ma ekstremum w punkcie $(1,0)$
- $\det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} > 0$

  oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} < 0$ Zatem f ma maksimum lokalne właściwe w punkcie $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

Odp.: Funkcja $f(x,y)$ ma jedno ekstremum: maksimum lokalne właściwe w punkcie $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$





(b) $f(x,y)=(y-x)^2+(y+2)^3$

- $D_f=\mathbb{R}^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2(y-x),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(y-x)+3(y+2)^2$

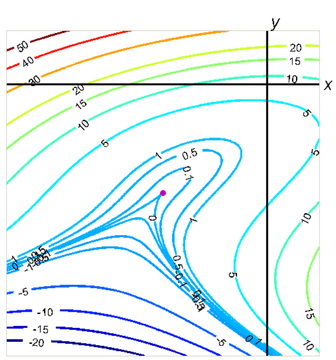
  obie pochodne są ciągłe na $\mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(y-x) = 0 \\ 2(y-x)+3(y+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

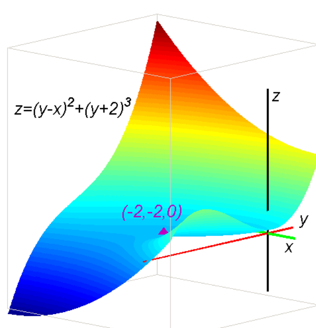
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3(y+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$

  Zatem f może mieć ekstremum tylko w punkcie $(-2,-2)$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2+6(y+2)$
- $\det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-2,-2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,-2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-2)\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2\end{bmatrix}=0$

  Nie wiemy na razie, czy f ma ekstremum w punkcie $(-2,-2)$
  Zbadamy to z definicji ekstremum lokalnego
- Weźmy $(x,y)=(-2+\frac{1}{n},-2+\frac{1}{n})$. Wtedy $f(x,y)=\frac{1}{n^3}>0=f(-2,-2)$.
  Teraz weźmy $(x,y)=(-2-\frac{1}{n},-2-\frac{1}{n})$. Wtedy $f(x,y)=-\frac{1}{n^3}<0=f(-2,-2)$.
  Wynika stąd, że w każdym otoczeniu punktu $(-2,-2)$ znajdują się punkty, w których wartość funkcji jest większa od $f(-2,-2)$, i punkty, w których wartość funkcji jest mniejsza od $f(-2,-2)$.
  Zatem f nie ma ekstremum w punkcie $(-2,-2)$.

Odp.: Funkcja $f(x,y)$ nie ma ekstremów lokalnych.





Przykłady 16.2:

Znajdź najmniejszą i największą wartość podanej funkcji $f(x,y)$ na zbiorze A domkniętym i ograniczonym:

(a) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $A = \{(x,y) : 0 \leqslant x, y \leqslant \frac{\pi}{2}\}$

1) Znajdziemy na początek punkty we wnętrzu A, w których $f(x,y)$ może mieć ekstrema lokalne:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x + \cos(x+y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + \cos(x+y)$

  obie pochodne są ciągłe na $\mathbb{R}^2$

- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \\ (x,y) \in \text{wnętrze } A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos(x+y) & = & 0 \\ \cos y + \cos(x+y) & = & 0 \\ 0 < x, y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x & = & \cos y \\ \cos x & = & -\cos(x+y) \\ 0 < x, y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & y \\ \cos x + \cos(2x) & = & 0 \\ 0 < x, y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & y \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 & = & 0 \\ 0 < x, y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t^2 + t - 1 = 0, 0 < t < 1 \\ \Delta = 9, \ t = 0,5 \\ (\text{odrzucamy } \ t_2 = -1 < 0) \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & y \\ \cos x & = & 0,5 \\ 0 < x, y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & \frac{\pi}{3} \\ y & = & \frac{\pi}{3} \end{cases}$

  Zatem we wnętrzu A funkcja $f(x,y)$ może mieć ekstremum lokalne tylko w punkcie $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

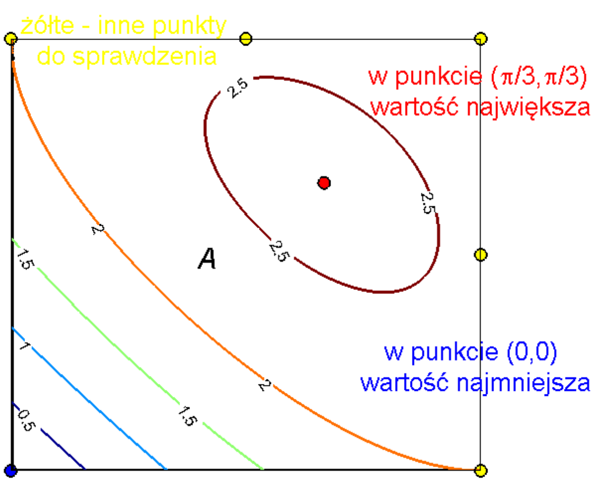
2) Znajdziemy teraz punkty, w których $f(x,y)$ może mieć ekstrema warunkowe z warunkiem: (x,y) należy do brzegu zbioru A, czyli $(x,y) \in B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$, gdzie
$B_1 = \{(x,y) : x = 0, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, $B_2 = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, y = 0\}$,
$B_3 = \{(x,y) : x = \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, $B_2 = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}\}$.

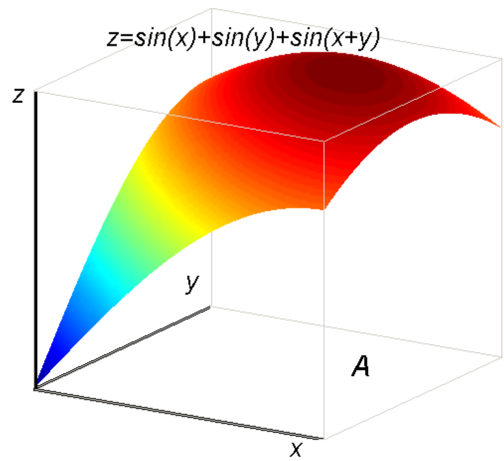
- Jeżeli $(x,y) \in B_1$, to $f(x,y) = f(0,y) = 2\sin y = g(y)$ dla $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.
  Z własności sinusa $g(y)$ ma w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ maksimum w $y = \frac{\pi}{2}$ i minimum w $y = 0$.
  Zatem $f(x,y)$ ma warunkowe maksimum w punkcie $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i warunkowe minimum w $(0,0)$ z warunkiem $(x,y) \in B_1$.
- Podobnie, jeżeli $(x,y) \in B_2$, to $f(x,y) = f(x,0) = 2\sin x = g(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
  Z własności sinusa $g(x)$ ma w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ maksimum w $x = \frac{\pi}{2}$ i minimum w $x = 0$.
  Zatem $f(x,y)$ ma warunkowe maksimum w punkcie $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ i warunkowe minimum w $(0,0)$ z warunkiem $(x,y) \in B_2$.
- Jeżeli $(x,y) \in B_3$, to $f(x,y) = f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 1 + \sin y + \cos y = g(y)$ dla $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.
  $g'(y) = \cos y - \sin y = 0 \Leftrightarrow \cos y = \sin y \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$ (dla $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$).
  Zatem $g(y)$ w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ może mieć ekstrema tylko w $y = \frac{\pi}{4}$ lub na końcach przedziału, czyli w $y = 0$ i w $y = \frac{\pi}{2}$.
  Zatem $f(x,y)$ może mieć warunkowe ekstrema z warunkiem $(x,y) \in B_3$ tylko w punktach $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ oraz $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

- Podobnie, jeżeli $(x,y) \in B_4$, to $f(x,y) = f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin x + \cos x = g(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$
  i $g(x)$ w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ może mieć ekstrema tylko w $x = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$.
  Zatem $f(x,y)$ może mieć warunkowe ekstrema z warunkiem $(x,y) \in B_4$
  tylko w punktach $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ oraz $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3) Obliczymy wartości funkcji $f(x,y)$ w punktach, w których funkcja ta może mieć ekstrema lokalne i ekstrema warunkowe, a następnie wyznaczymy wartość najmniejszą m i wartość największą M funkcji na zbiorze A:

- $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$, $f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right) = 2$, $f(0,0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = 2$
- $m = \min(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 2, 0, 1+\sqrt{2}) = 0, \quad M = \max(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 2, 0, 1+\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$





(b) $f(x,y) = x^2 y$, $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

1) Znajdziemy na początek punkty we wnętrzu A, w których $f(x,y)$ może mieć ekstrema lokalne:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$

  obie pochodne są ciągłe na $\mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \\ (x,y) \in \text{wnętrze } A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x^2+y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -1 < y < 1 \end{cases}$

  Zatem we wnętrzu A funkcja $f(x,y)$ może mieć ekstremum lokalne
  tylko w punktach postaci $(0,y)$, gdzie $-1 < y < 1$.

2) Znajdziemy teraz punkty, w których $f(x,y)$ może mieć ekstrema warunkowe z warunkiem: (x,y) należy do brzegu zbioru A, czyli $(x,y) \in \Gamma$, gdzie $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

- Jeżeli $(x,y) \in \Gamma$, to $x^2 = 1 - y^2$ i $f(x,y) = (1-y^2)y = y - y^3 = g(y)$ dla $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
  $g'(y) = 1 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
  Zatem $g(y)$ w przedziale $[-1,1]$ może mieć ekstrema tylko w $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub na końcach przedziału, czyli w $y = \pm 1$.
  Zatem $f(x,y)$ może mieć warunkowe ekstrema z warunkiem $(x,y) \in \Gamma$
  tylko w punktach $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $(0,-1)$ oraz $(0,1)$.

3) Obliczymy wartości funkcji $f(x,y)$ w punktach, w których funkcja ta może mieć ekstrema lokalne i ekstrema warunkowe, a następnie wyznaczymy wartość najmniejszą m i wartość największą M funkcji na zbiorze A:

- Dla dowolnego $-1 < y < 1$ mamy $f(0,y) = 0$.
  $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$,
  $f(0,-1) = f(0,1) = 0$.
- $m = \min(0, \frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\quad M = \max(0, \frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$