Analiza Matematyczna

Przykłady: **Ciągi liczbowe**

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **1.1**: Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic oraz o granicach niewłaściwych ciągów oblicz podane granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1}}$

Metoda: Dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n w mianowniku, czyli przez $n\sqrt{n^2}=n^2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= (1+0)\cdot\frac{\sqrt[3]{8+0}}{\sqrt{1+0}} = 2$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

Metoda: Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ dla $a=\sqrt{n^2+n}$, $b=n$. Następnie jak w przykładzie (a)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n-1}{3^n+2}\right)^5$

Metoda: Dzielimy licznik i mianownik przez 3^n - składnik o najwiekszym ilorazie i korzystamy z faktu o granicy ciągu geometrycznego: $\lim q^n = 0$ dla $|q|<1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{3^n+2}\right)^5 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)^5 = \left(\frac{0-0}{1+2\cdot 0}\right)^5 = 0$$

(Ważne jest to, że mianownik $1+2\cdot 0\neq 0$.)

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}(5^n-4^n-3^n-2^n)$

Metoda: wyciagamy składnik o najwiekszym ilorazie przed nawias.

$$\lim_{n\to\infty}(5^n-4^n-3^n-2^n) = \lim_{n\to\infty}5^n\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = \infty\cdot(1-0-0-0) = \infty$$

(e) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+1}\right)^{n-n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \left(\frac{2+0}{3+0}\right)^{\infty\cdot(0-1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$$

(f) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{(n^2+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}(n^2+1)^{\frac{n+1}{2n}} = \lim_{n\to\infty}(n^2+1)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{2}} = (\infty+1)^{\frac{1+0}{2}} = \infty^{1/2} = \infty$$

Przykłady **1.2**:
Korzystając z twierdzeń o trzech i o dwóch ciągach znajdź podane granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$

Rozwiązanie:

- $b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$
- $a_n = 5 = \sqrt[n]{5^n} \leqslant b_n \leqslant \sqrt[n]{3\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3} = c_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5,\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 5\cdot 1 = 5$

Zatem z tw. o 3 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} = 5.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n}$

Rozwiązanie:

- $b_n = \sqrt[n]{3^n-2^n} = 3\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$
- $\frac{1}{3} = 1-\frac{2}{3}^1 \leqslant 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 1$, a zatem
  $a_n = 3\sqrt[n]{\frac{1}{3}} \leqslant b_n \leqslant 3\sqrt[n]{1} = 3 = c_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3\cdot 1 = 3,\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 3$

Zatem z tw. o 3 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n} = 3.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Rozwiązanie:

- $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$
  największy jest pierwszy składnik sumy, najmniejszy - ostatni, suma ma n składników
- $a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant b_n \leqslant n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = c_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$

Zatem z tw. o 3 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (4^n+(-1)^n)$

Rozwiązanie:

- $a_n = 4^n-1 \leqslant 4^n+(-1)^n = b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (4^n-1) = \infty-1 = \infty$

Zatem z tw. o 2 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3n)$

Rozwiązanie:

- $a_n = 3n \leqslant 2^n + 3n = b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3n = \infty$

Zatem z tw. o 2 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\cos n - 5)n^2$.

Rozwiązanie:

- $\cos n \leqslant 1$, zatem $a_n = (2\cos n - 5)n^2 \leqslant (2\cdot 1 - 5)n^2 = -3n^2 = b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-3n^2) = -\infty$

Zatem z tw. o 2 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Rozwiązanie:

- $a_n = \sqrt{n} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = b_n$
  (od dołu ograniczamy sumę przez ilość składników razy najmniejszy - ostatni - składnik)
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

Zatem z tw. o 2 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Przykłady **1.3**:

Korzystając z definicji liczby e oblicz podane granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right)^2 = e^2$

($a_n = 2^n > 0$, $a_n \to \infty$, $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n+4}{-3}}\right)^{\frac{3n+4}{-3}}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+4}{-3}}\right)^{-4/3} = e^{-1}\cdot 1^{-4/3} = e^{-1}$

($a_n = \frac{3n+4}{-3} < 0$, $a_n \to -\infty$, $n = (-1)\cdot\left(\frac{3n+4}{-3}\right) - \frac{4}{3}$)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\cdot\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-2}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = e^2\cdot e^{-2}\cdot 1 = 1$

($a_n = -n < 0$, $a_n \to -\infty$)