Analiza Matematyczna

Przykłady: **Granice funkcji**

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **2.1**:

Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic oraz o granicach niewłaściwych funkcji oblicz podane granice

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3}{x^3+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{1+\frac{2}{x^3}}=\dfrac{(1+0)^3}{1+0}=1$

(jak dla ciagów)

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{-\sqrt{1+0}}=-1$

($\sqrt{x^2+1}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$)

(c) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-1)-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{1}{4}$

($a^2-b^2=(a-b)(a+b)$)

(d) $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to1-}(-\sqrt{1-x}(x+1))=-\sqrt{1-1}(1+1)=0$

($a^2-b^2=(a-b)(a+b)$)

(e) $\lim\limits_{x\to1+}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}+\ln\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1+}\left((x+1)+\ln\dfrac{1}{x-1}\right)=\begin{bmatrix} x\to1+ \\ y=\frac{1}{x-1}\to\frac{1}{0+}=\infty \\ \ln y\to\infty \end{bmatrix}=$

$=(1+1)+\infty=\infty$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2+1}\right)^{x-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\left(\dfrac{2+0}{3+0}\right)^{\infty(0-1)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\infty}=\infty$

(g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(2x)}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{0+}=\infty$

Przykłady **2.2**:

Korzystając z twierdzeń o trzech i o dwóch funkcjach uzasadnij podane równości:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)=0$

Uzasadnienie:

- $-1 \leqslant \cos\frac{1}{x} \leqslant 1$

  $1 \leqslant 2+\cos\frac{1}{x} \leqslant 3 \;\Big|\; \cdot x^2 > 0$

  $f(x)=x^2 \leqslant g(x) \leqslant 3x^2 = h(x)$ dla $g(x)=x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0,\ \lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0} 3x^2=0$

Zatem z tw. o 3 funkcjach $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\lfloor e^x\rfloor}{e^x+1}=1$

Uzasadnienie:

- $e^x-1 \leqslant \lfloor e^x\rfloor \leqslant e^x \;\Big|\; : e^x+1>0$

  $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \leqslant g(x) \leqslant \frac{e^x}{e^x+1}=h(x)$ dla $g(x)=\frac{\lfloor e^x\rfloor}{e^x+1}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1+0}{1+0}=1$

  $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+0}=1$

Zatem z tw. o 3 funkcjach $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin x - e^x)=-\infty$

Uzasadnienie:

- $\sin x \leqslant 1$

  $f(x)=\sin x - e^x \leqslant 1-e^x = g(x)$

- $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(1-e^x)=1-\infty=-\infty$

Zatem z tw. o 2 funkcjach $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=\infty$

Uzasadnienie:

- $-1 \leqslant \cos\frac{1}{x}$

  $1 \leqslant 2+\cos\frac{1}{x} \;\Big|\; : \sqrt{x}>0$

  $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=g(x)$

- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0+}=\infty$

Zatem z tw. o 2 funkcjach $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$

Przykłady $\boxed{\textbf{2.3}}$:

Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych oblicz podane granice funkcji

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x^3)}{-2x^3}\cdot(-2)=\begin{bmatrix} y=-2x^3\\ x\to 0\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot(-2)=1\cdot(-2)=-2$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}2^x\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{x}=2^0\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3}{2}$$

(d) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right)^{\frac{2x-1}{x^2}}=e^0=1$$

Obliczenia pomocnicze:

- $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\begin{bmatrix} y=x^2\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=0-0=0$$

(e) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{2x-\pi}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left((1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right)^{\frac{\cos x}{2x-\pi}}=e^{-1/2}$$

Obliczenia pomocnicze:

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=\begin{bmatrix} y=\cos x\\ x\to\frac{\pi}{2}\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$$
- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\begin{bmatrix} y=x-\frac{\pi}{2}\\ x\to\frac{\pi}{2}\\ y\to 0\\ \cos x=\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin y\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{2y}=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$

Przykłady **2.4**:

Obliczając granice jednostronne zbadaj, czy istnieją podane granice funkcji

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|^3}{x-1}$

- $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{|x-1|^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+} (x-1)^2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{|x-1|^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-} (-(x-1)^2) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 0$

Zatem istnieje granica $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|^3}{x-1} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

- $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0+}}} = \dfrac{1}{1+e^{\infty}} = \dfrac{1}{1+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0-}}} = \dfrac{1}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$

Zatem badana granica nie istnieje.

Przykłady **2.5***:

Uzasadnij, że podane granice nie istnieją

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

- dla $x_n^{'} = \dfrac{1}{n\pi} \to 0+$ (bo $x_n^{'} > 0$) mamy $\sin\left(\dfrac{1}{x_n^{'}}\right) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$
- natomiast dla $x_n^{''} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \to 0+$ (bo $x_n^{''} > 0$)

  mamy $\sin\left(\dfrac{1}{x_n^{''}}\right) = \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1 \to 1 \neq 0$

Zatem badana granica nie istnieje.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

- dla $x_n^{'} = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$ mamy $\dfrac{|x_n^{'}-1|}{x_n^{'}-1} = \dfrac{1/n}{1/n} = 1 \to 1$
- natomiast dla $x_n^{''} = 1 - \dfrac{1}{n} \to 1$ mamy $\dfrac{|x_n^{'}-1|}{x_n^{'}-1} = \dfrac{1/n}{-1/n} = -1 \to -1 \neq 1$

Zatem badana granica nie istnieje.