# Analiza Matematyczna

## Przykłady: **Asymptoty. Ciągłość funkcji**

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **3.1**:

Znajdź asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji

(a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

- $D_f : x \neq 0$, czyli $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
  zatem $f(x)$ może mieć tylko asymptotę pionową w $x_0 = 0$
  oraz asymptoty ukośne w $+\infty$ i w $-\infty$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty pionowej:
  $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0+}} = e^{\infty} = \infty$
  $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0-}} = e^{-\infty} = 0$
  Zatem prosta $l : x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $f(x)$.
- Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej w $+\infty$:
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$
  Zatem prosta $l : y = 1$ jest poziomą asymptotą funkcji $f(x)$ w $+\infty$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej w $-\infty$:
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$
  Zatem prosta $l : y = 1$ jest poziomą asymptotą funkcji $f(x)$ w $-\infty$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$

- $D_f : x \neq 0$, czyli $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
  zatem $f(x)$ może mieć tylko asymptotę pionową w $x_0 = 0$
  oraz asymptoty ukośne w $+\infty$ i w $-\infty$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty pionowej:
  $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0\pm} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot x = 1 \cdot 0 = 0$
  Zatem $f(x)$ nie ma asymptoty pionowej w $x_0 = 0$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej w $+\infty$:
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ z twierdzenia o 3 funkcjach, bo
  dla $x > 0$ mamy $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
  Zatem prosta $l : y = 0$ jest poziomą asymptotą funkcji $f(x)$ w $+\infty$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej w $-\infty$:
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, podobnie jak dla $x \to \infty$
  Zatem prosta $l : y = 0$ jest poziomą asymptotą funkcji $f(x)$ w $-\infty$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

- $D_f : |x| \geqslant 1$, czyli $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$,
  zatem $f(x)$ może mieć tylko asymptoty ukośne w $+\infty$ i w $-\infty$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej w $+\infty$:
  $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 = A_+$
  $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - A_+x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right) =$
  $\frac{-1}{\infty+\infty} = \frac{-1}{\infty} = 0 = B_+$
  Zatem prosta $l : y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x)$ w $+\infty$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej w $-\infty$:
  Skorzystamy z faktu, że:

  *Jeżeli $f(x)$ ma asymptotę ukośną $l : y = A_+x + B_+$ w $+\infty$ i jest funkcją parzystą (czyli $f(-x) = f(x)$), to w $-\infty$ ma asymptotę ukośną $l : y = -A_+x + B_+$.*
  *Natomiast jeżeli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą (czyli $f(-x) = -f(x)$), to w $-\infty$ ma asymptotę ukośną $l : y = A_+x - B_+$.*

  Rozważana funkcja jest parzysta,
  zatem prosta $l : y = -x$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x)$ w $-\infty$.

(d) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

- $D_f : x \geqslant 0$, czyli $D_f = [0, \infty)$,
  zatem $f(x)$ może mieć tylko asymptotę ukośną w $+\infty$
- Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej w $+\infty$:
  $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 1 = A_+$
  $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - A_+x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x - 2\sqrt{x} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-2\sqrt{x}) = -\infty$
  Zatem $f(x)$ nie ma asymptoty ukośnej w $+\infty$

Przykład $\boxed{3.2}$:

Dobierz parametry $a$, $b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b & \text{dla} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

- Dla dowolnych $a$, $b \in \mathbb{R}$, na każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, \infty)$ funkcja $f(x)$ jest zadana pewną funkcją elementarną, więc jest ciągła na każdym z tych przedziałów. Musimy zatem tylko zapewnić ciągłość w punktach $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.

- $f(-1) = -1$
  $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} x = -1$
  $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-} (x^2 + ax + b) = 1 - a + b$
  $f(x)$ jest ciągła w $x_1 = -1 \iff f(-1) = \lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-} f(x) \iff -1 = -1 = 1 - a + b$
  $\iff a - b = 2$

- $f(1) = 1$
  $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b$
  $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} x = 1$
  $f(x)$ jest ciągła w $x_2 = 1 \iff f(1) = \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} f(x) \iff 1 = 1 + a + b = 1$
  $\iff a + b = 0$

- Zatem $f(x)$ jest ciągła na $\mathbb{R} \iff \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Przykłady $\boxed{3.3}$:

Wyznacz punkty nieciągłości podanych funkcji i określ ich rodzaj:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{dla} \quad x \neq 1, \\ 2 & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$

- Na każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ i $(1, \infty)$ funkcja $f(x)$ jest zadana pewną funkcją elementarną, więc jest ciągła na każdym z tych przedziałów. Może zatem mieć nieciągłość jedynie w punkcie $x_0 = 1$.
- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$
- $f(1) = 2 = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$,

  zatem $f(x)$ jest ciągła w $x_0 = 1$.
- **Odp.** Badana funkcja nie ma punktów nieciągłości.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$

- Na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ funkcja $f(x)$ jest zadana pewną funkcją elementarną, więc jest ciągła na każdym z tych przedziałów. Może zatem mieć nieciągłość jedynie w punkcie $x_0 = 0$.
- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $f(0) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x)$,

  zatem $f(x)$ ma w $x_0 = 0$ nieciągłość I rodzaju typu „luka”
- **Odp.** Badana funkcja ma jeden punkt nieciągłości ($x_0 = 0$). Jest to nieciągłość I rodzaju typu „luka”.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

- Na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ funkcja $f(x)$ jest zadana pewną funkcją elementarną, więc jest ciągła na każdym z tych przedziałów. Może zatem mieć nieciągłość jedynie w punkcie $x_0 = 0$.
- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{0-}}} = \dfrac{1}{1 + e^{-\infty}} = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{0+}}} = \dfrac{1}{1 + e^{\infty}} = \dfrac{1}{1 + \infty} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0-} f(x)$,

  zatem $f(x)$ ma w $x_0 = 0$ nieciągłość I rodzaju typu „skok”
- **Odp.** Badana funkcja ma jeden punkt nieciągłości ($x_0 = 0$). Jest to nieciągłość I rodzaju typu „skok”.

(d) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \sqrt{x} \sin \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$

- Na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ funkcja $f(x)$ jest zadana pewną funkcją elementarną, więc jest ciągła na każdym z tych przedziałów. Może zatem mieć nieciągłość jedynie w punkcie $x_0 = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} 1 - \cos \dfrac{1}{x}$ nie istnieje, bo

  dla $x_n' = -\dfrac{1}{2n\pi} \to 0-$ (bo $x_n' < 0$) mamy $1 - \cos\left(\dfrac{1}{x_n'}\right) = 1 - \cos(2n\pi) = 0 \to 0$, natomiast dla $x_n'' = -\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \to 0-$ (bo $x_n'' < 0$)

mamy $1-\cos\left(\dfrac{1}{x_n''}\right) = 1-\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1 \to 1 \neq 0.$

Zatem $f(x)$ ma w $x_0 = 0$ nieciągłość II rodzaju

1. **Odp.** Badana funkcja ma jeden punkt nieciągłości ($x_0 = 0$). Jest to nieciągłość II rodzaju.

Przykład **3.4**:

Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnij, że równanie $\ln x = 2-x$ ma jednoznaczne rozwiązanie w przedziale $(1,2)$. Wyznacz to rozwiązanie z dokładnością 0.125.

- $f(x) = \ln x + x - 2$ jest ciągła na $[1,2]$ jako funkcja elementarna
- $f(x)$ jest rosnąca na $[1,2]$, bo $\ln x$ i $x$ są rosnące
- $f(1)\cdot f(2) = (0+1-2)\cdot(\ln 2+2-2) = -\ln 2 < 0$
- Zatem z tw. Darboux o miejscach zerowych istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in (1,2)$ taki, że $f(x_0) = 0$, czyli równanie $\ln x = 2-x$ ma jednoznaczne rozwiązanie w przedziale $(1,2)$.
- Wyznaczymy punkt $x_0$ w przybliżeniu z dokładnością 0.125.

  $1^0$ $f(1) =< 0$, $f(2) > 0$, więc $x_0 = \dfrac{2+1}{2} = 1.5 \pm 0.5$

  $2^0$ $f(1.5) = \ln(1.5) + 1.5 - 2 \approx 0.4 - 0.5 < 0$, więc $x_0 \in (1.5, 2)$ i $x_0 = \dfrac{2+1.5}{2} = 1.75 \pm 0.25$

  $3^0$ $f(1.75) = \ln(1.75) + 1.75 - 2 \approx 0.56 - 0.25 > 0$, więc $x_0 \in (1.5, 1.75)$
  i $x_0 = \dfrac{1.75+1.5}{2} = 1.625 \pm 0.125$ - dokładność, jaką sobie ustaliliśmy