Analiza Matematyczna

Przykłady: **Pochodna funkcji. Styczna**

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykład **4.1**:

Korzystając z definicji wyznacz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

- Weźmy dowolne ustalone $x \in \mathbb{R}$. Wtedy
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$
- Stąd $f'(x) = (x^2)' = 2x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

Przykłady **4.2**:

Korzystając z definicji zbadaj, czy istnieje pochodna właściwa lub niewłaściwa podanej funkcji we wskazanym punkcie

(a) $f(x) = |x-3|$ w punkcie $x_0 = 3$.

- $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|3+\Delta x - 3| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|3+\Delta x - 3| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$

Zatem istnieją pochodne lewostronna i prawostronna w punkcie $x_0 = 3$,
ale $f'_+(3) = 1 \neq -1 = f'_-(3)$, więc pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 3$ nie istnieje.

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ w punkcie $x_0 = 1$

- $f(x)$ jest ciągła w $x_0 = 1$ jako funkcja elementarna
- $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\Delta x - 1} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \frac{1}{0+} = \infty$

Zatem istnieje pochodna niewłaściwa $f'(1) = \infty$

(c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-2)$ w punkcie $x_0 = 2$

- $f(x)$ nie jest ciągła w $x_0 = 2$, bo $\displaystyle\lim_{x \to 2+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 2-} f(x)$

Zatem nie istnieje pochodna niewłaściwa (ani właściwa) funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 2$,
mimo że

- $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sgn}(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{|\Delta x|} = \frac{1}{0+} = \infty$

Przykłady **4.3**:

Korzystając z reguł różniczkowania oblicz pochodne podanych funkcji

(a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - \dfrac{1}{x} + \sqrt{x},\ x > 0$

- $f'(x) = (x^4)' + 3(x^2)' - (x^{-1})' + (x^{1/2})' = 4x^3 + 3 \cdot 2x - (-1)x^{-2} + \dfrac{1}{2}x^{-1/2} =$
  $= 4x^3 + 6x + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$

(b) $f(x) = \sin x \cdot \mathrm{sh}x,\ x \in \mathbb{R}$

- $f'(x) = (\sin x)' \cdot \mathrm{sh}x + \sin x \cdot (\mathrm{sh}x)' = \cos x \cdot \mathrm{sh}x + \sin x \cdot \mathrm{ch}x,\ x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{e^x + \cos x}{e^x + 4},\ x \in \mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{(e^x + \cos x)' \cdot (e^x + 4) - (e^x + \cos x) \cdot (e^x + 4)'}{(e^x + 4)^2} =$
  $= \dfrac{(e^x - \sin x) \cdot (e^x + 4) - (e^x + \cos x) \cdot (e^x + 0)}{(e^x + 4)^2} =$
  $= \dfrac{e^x(4 - \sin x - \cos x) - 4\sin x}{(e^x + 4)^2},\ x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \sin^2 x,\ x \in \mathbb{R}$

- złożenie x, $\sin x$, $(\ldots)^2$
- $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x,\ x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \sin(x^2),\ x \in \mathbb{R}$

- złożenie x, x^2, $\sin(\ldots)$,
- $f'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x),\ x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = e^{\cos\sqrt{x}},\ x \geqslant 0$

- złożenie x, $\sqrt{x}$, $\cos(\ldots)$, $e^{(\ldots)}$
- $f'(x) = e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (-\sin\sqrt{x}) \cdot \left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right),\ x \geqslant 0$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\sin x)},\ x \in \mathbb{R}$

- złożenie x, $\sin x$, $\cos(\ldots)$, $\dfrac{1}{(\ldots)} = (\ldots)^{-1}$
- $f'(x) = (-1)(\cos(\sin x))^{-2} \cdot (-\sin(\sin x)) \cdot \cos x,\ x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = \operatorname{tg}(x + x^5)$, $x + x^5 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

- złożenie $x + x^5$, $\operatorname{tg}(\ldots)$
- $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x + x^5)} \cdot (x + x^5)' = \dfrac{1}{\cos^2(x + x^5)} \cdot (1 + 5x^4)$, x j.w.

(h) $f(x) = (3x^2 + 1)^3$, $x \in \mathbb{R}$

- złożenie $3x^2 + 1$, $(\ldots)^3$
- $f'(x) = 3(3x^2 + 1)^2 \cdot (3x^2 + 1)' = 3(3x^2 + 1)^2 \cdot (6x + 0) = 18x(3x^2 + 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

(h) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^4$, $x \in \mathbb{R}$

- złożenie $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(\ldots)^4$
- $$f'(x) = 4\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = 4\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^3 \cdot \left(\frac{(x^2 - 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}\right) =$$
  $$= 4\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^3 \cdot \left(\frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}\right) = \frac{16x(x^2 - 1)^3}{(x^2 + 1)^5},\ x \in \mathbb{R}$$

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

- złożenie $x^3 + 1$, $\sqrt[3]{(\ldots)} = (\ldots)^{1/3}$
- $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x^3 + 1)^{-2/3} \cdot (3x^2)$, $x \in \mathbb{R}$

(j) $f(x) = \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{1 + \cos(x^2)}$, $x \neq \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

- $$f'(x) = \frac{\left(\sin \frac{1}{x}\right)' \cdot (1 + \cos(x^2)) - \left(\sin \frac{1}{x}\right) \cdot (1 + \cos(x^2))'}{(1 + \cos(x^2))^2} =$$
  $$= \frac{(-x^{-2} \cos(x^{-1})) \cdot (1 + \cos(x^2)) - (\sin(x^{-1})) \cdot (-2x \sin(x^2))}{(1 + \cos(x^2))^2},\ x \text{ j.w.}$$

  Obliczenia pomocnicze:
- $\left(\sin \dfrac{1}{x}\right)' = \cos(x^{-1}) \cdot (-1)x^{-2}$,
  bo to złożenie $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $\sin(\ldots)$
- $(1 + \cos(x^2))' = 0 + (\cos(x^2))' = (-\sin(x^2)) \cdot (2x)$,
  bo to złożenie x^2, $\cos(\ldots)$

(k) $f(x) = \ln\left(\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg} x\right)$, $x \in D_f$

- złożenie $\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg} x$, $\ln(\ldots)$
- $f'(x) = \dfrac{1}{\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg} x} \cdot \left(\dfrac{1}{\frac{x}{3}} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$, $x \in D_f$

(l) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}}$, $x \geqslant 0$

- złożenie $\sqrt[4]{x}$, $\operatorname{arctg}(\ldots)$, $e^{(\ldots)}$
- $f'(x) = e^{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{1}{1 + (\sqrt[4]{x})^2} \cdot \dfrac{1}{4} x^{-3/4}$, $x > 0$

(m) $f(x) = \cos^4 x \cdot \cos(5x)$, $x \in \mathbb{R}$

- $f'(x) = (\cos^4 x)' \cdot \cos(5x) + \cos^4 x \cdot (\cos(5x))' =$
  $= 4\cos^3 x(-\sin x) \cdot \cos(5x) + \cos^4 x \cdot (-\sin(5x) \cdot 5)$, $x \in \mathbb{R}$

  Obliczenia pomocnicze:
- $(\cos^4 x)' = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x)$,
  bo to złożenie $\cos x$, $(\ldots)^4$
- $(\cos(5x))' = (-\sin(5x)) \cdot 5$,
  bo to złożenie $5x$, $\cos(\ldots)$

(n) $f(x) = 2^{x \sin x}$, $x \in \mathbb{R}$

- złożenie $x \sin x$, $2^{(\ldots)}$
- $f'(x) = 2^{x \sin x} \ln 2 \cdot (x \sin x)' = 2^{x \sin x} \ln 2 \cdot (\sin x + x \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$

  Obliczenia pomocnicze:
- $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x$

(o) $f(x) = x^{\sin x}$, $x > 0$

- $a(x)^{b(x)} = e^{b(x) \ln a(x)}$,

  zatem $f(x) = e^{\sin x \ln x}$
- złożenie $\sin x \ln x$, $e^{(\ldots)}$
- $f'(x) = e^{\sin x \ln x} \cdot (\sin x \ln x)' = e^{\sin x \ln x} \cdot (\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x)$, $x > 0$

  Obliczenia pomocnicze:
- $(\sin x \ln x)' = (\sin x)' \ln x + \sin x(\ln x)' = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

(p) $f(x) = x^{x^2}$, $x > 0$

- $f(x) = e^{x^2 \ln x}$
- złożenie $x^2 \ln x$, $e^{(\ldots)}$
- $f'(x) = e^{x^2 \ln x} \cdot (x^2 \ln x)' = e^{x^2 \ln x} \cdot x(2\ln x + 1)$, $x > 0$

  Obliczenia pomocnicze:
- $(x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2(\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$

(q) $f(x) = \log_x 7,\ x > 0,\ x \neq 1$

- $f(x) = \dfrac{\ln 7}{\ln x} = \ln 7(\ln x)^{-1}$
- złożenie $\ln x$, $\ln 7(\ldots)^{-1}$
- $f^{'}(x) = -\ln 7(\ln x)^{-2} \cdot \dfrac{1}{x},\ x > 0,\ x \neq 1$

Przykład **4.3**:

Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oblicz $(f^{-1})^{'}(2)$ dla $f(x) = e^x + e^{5x}$.

- $f(0) = 2,\ x_0 = 0,\ y_0 = 2$
- $f(x)$ jest ciągła i rosnąca na $\mathbb{R}$ (wystarczy na otoczeniu $x_0 = 0$)
- $f^{'}(x) = e^x + 5e^{5x},\ f^{'}(0) = 1 + 5 = 6 \neq 0$

Zatem z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej $(f^{-1})^{'}(2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{6}$

Przykład **4.5**:

Oblicz $f^{'}(x)$, $f^{''}(x)$, $f^{'''}(x)$ dla podanej funkcji $f(x)$.

(a) $f(x) = x \ln x$

$f^{'}(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$f^{''}(x) = (\ln x + 1)^{'} = \dfrac{1}{x}$

$f^{'''}(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{'} = -\dfrac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = e^{x^2}$

$f^{'}(x) = 2xe^{x^2}$

$f^{''}(x) = (2xe^{x^2})^{'} = 2e^{x^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$

$f^{'''}(x) = (2e^{x^2}(2x^2 + 1))^{'} = 2(2xe^{x^2}(2x^2 + 1) + e^{x^2} \cdot 4x) = 4xe^{x^2}(2x^2 + 3)$

Przykład **4.6**:

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = e^{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}}$
w punkcie $(1, f(1))$.

- $f^{'}(x) = e^{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{1}{1 + (\sqrt[4]{x})^2} \cdot \dfrac{1}{4} x^{-3/4}$
- $f(1) = e^{\pi/4},\ f^{'}(1) = e^{\pi/4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} e^{\pi/4}$

Równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie $(1, f(1))$ ma postać
$l_{st} : y - f(1) = f^{'}(1)(x - 1)$, czyli

Odp. $l_{st} : y - e^{\pi/4} = \dfrac{1}{8} e^{\pi/4}(x - 1)$