Analiza Matematyczna

Przykłady: Badanie przebiegu funkcji

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykłady **6.1**:

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x)$.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f'(x) = \dfrac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, przy czym mianownik $(1+x^2)^2 > 0$ dla każdego x
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ lub $x > 1$

Wniosek: $f(x)$ jest rosnąca na $(-1, 1)$, malejąca na $(-\infty, -1)$ i na $(1, \infty)$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

- $D_f : |x| \neq 1$, czyli $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.
- $f'(x) = \dfrac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ dla $x \in D_f$, przy czym $\dfrac{x^2}{(1-x^2)^2} > 0$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 > 0, x \in D_f \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, |x| \neq 1$
  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 < 0, x \in D_f \Leftrightarrow x < -\sqrt{3}$ lub $x > \sqrt{3}$

Wniosek: $f(x)$ jest rosnąca na $(-\sqrt{3}, -1)$, na $(-1, 1)$ i na $(1, \sqrt{3})$, a jest malejąca na $(-\infty, -\sqrt{3})$ i na $(\sqrt{3}, \infty)$.

(c) $f(x) = \mathrm{arctg} x - \ln x$

- $D_f : x > 0$, czyli $D_f = (0, \infty)$.
- $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x^2 + x - 1}{x(1+x^2)}$ dla $x \in D_f$,
  przy czym dla $x \in D_f$ mamy $x(1+x^2) > 0$, natomiast $-x^2 + x - 1 < 0$ (gdyż $\Delta = -3 < 0$, a przy x^2 współczynnik jest ujemny.)
- Zatem $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in D_f$

Wniosek: $f(x)$ jest malejąca na $D_f = (0, \infty)$.

(d) $f(x) = x^x$

- $f(x) = e^{x \ln x}$
- $D_f : x > 0$, czyli $D_f = (0, \infty)$.
- $f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1)$ dla $x \in D_f$, przy czym $e^{x \ln x} > 0$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0, x \in D_f \Leftrightarrow x > e^{-1}$
  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0, x \in D_f \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$

Wniosek: $f(x)$ jest rosnąca na (e^{-1}, ∞), malejąca na $(0, e^{-1})$.

Przykłady $\boxed{\mathbf{6.2}}$:

Znajdź ekstrema podanej funkcji $f(x)$.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f'(x) = \dfrac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
  przy czym mianownik $(1+x^2)^2 > 0$ dla każdego x
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ lub $x > 1$
- $f(x)$ jest ciągła w $x_0 = -1$ i w $x_0 = 1$ (albo $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$)
- Zatem $f(x)$ ma w $x_0 = -1$ minimum lokalne właściwe, a w $x_0 = 1$ ma maksimum lokalne właściwe.

Wniosek: $f(x)$ ma dwa ekstrema lokalne: minimum lokalne właściwe w $x_0 = -1$ oraz maksimum lokalne właściwe w $x_0 = 1$.

(b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

- $D_f : x > 0$
- $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$
  przy czym mianownik $x^2 > 0$ dla każdego $x \in D_f$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0, x \in D_f \Leftrightarrow 0 < x < e$
  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0, x \in D_f \Leftrightarrow x > e$
- $f(x)$ jest ciągła w $x_0 = e$ (albo $f'(e) = 0$)
- Zatem $f(x)$ ma w $x_0 = e$ maksimum lokalne właściwe

Wniosek: $f(x)$ ma jedno ekstremum lokalne: maksimum lokalne właściwe w $x_0 = e$.

(c) $f(x) = x(x-4)^3$.

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f'(x) = (x-4)^3 + x \cdot 3(x-4)^2 = 4(x-1)(x-4)^2$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ lub $x = 4$
  Zatem $f(x)$ może mieć ekstrema tylko w punktach $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$
- $f''(x) = 4(x-4)^2 + 4(x-1) \cdot 2(x-4) = 12(x-2)(x-4)$
- $f''(x_1) = f''(1) = 12 \cdot (-1)(-3) = 36 > 0$, $n = 2$ jest parzyste,
  zatem $f(x)$ ma w $x_1 = 1$ minimum lokalne właściwe
- $f''(x_2) = f''(4) = 0$,
  $f'''(x) = 12((x-4) + (x-2)) = 24(x-3)$,
  $f'''(x_2) = f'''(4) = 24 \neq 0$, $n = 3$ jest nieparzyste,
  zatem $f(x)$ nie ma ekstremum w $x_2 = 4$

Wniosek: $f(x)$ ma jedno ekstremum lokalne: minimum lokalne właściwe w $x_1 = 1$.

(d) $f(x) = |x| + x$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 2x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$
- $f^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ \text{nie istnieje} & \text{dla} \quad x = 0 \\ 2 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$,
- $f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x < 0$
  Zatem $f(x)$ może mieć ekstrema jedynie w punktach $x_0 \leqslant 0$
- Dla $x_0 < 0$ mamy dla dość małego $\delta > 0$ $\bigwedge_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = 0 \geqslant 0 = f(x_0)$,
  czyli $f(x)$ ma w x_0 minimum lokalne
- Dla $x_0 = 0$ mamy dla dowolnego $\delta > 0$ $\bigwedge_{-\delta < x < 0} f(x) = 0 \geqslant 0 = f(0)$ oraz
  $\bigwedge_{0 < x < \delta} f(x) = 2x \geqslant 0 = f(0)$
  Zatem $\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in (-\delta, \delta)} f(x) \geqslant f(0)$, czyli $f(x)$ ma w $x_0 = 0$ minimum lokalne

Wniosek: $f(x)$ ma minimum lokalne w każdym punkcie $x_0 \leqslant 0$
(nie są to minima lokalne właściwe)

Przykład **6.3**:

Znajdź wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3|x+2|$ na przedziale $[-4, 1]$.

- $f(x) = \begin{cases} -x^3(x+2) & \text{dla} \quad x < -2 \\ x^3(x+2) & \text{dla} \quad x \geqslant -2 \end{cases}$, $[a, b] = [-4, 1]$
- $f^{'}(x) = \begin{cases} -3x^2(x+2) - x^3 = -2x^2(2x+3) & \text{dla} \quad -4 \leqslant x < -2 \\ ? & \text{dla} \quad x = -2 \\ 2x^2(2x+3) & \text{dla} \quad -2 < x \leqslant 1 \end{cases}$
  $f^{'}(x)$ może nie istnieć w $x = -2$
  $f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = -3/2$, punkty $-3/2, 0 \in [-4, 1]$
- $a = -4,\ b = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = -3/2,\ d_1 = -2$
  $f(-4) = -128,\ f(1) = 3,\ f(0) = 0,\ f(-3/2) = -27/16,\ f(-2) = 0$
- $m = \min(-128, 3, 0, -27/16) = -128$,
  $M = \max(-128, 3, 0, -27/16) = 3$

Odp. Wartość najmniejsza funkcji $f(x) = x^3|x+2|$ na przedziale $[-4, 1]$ to $m = -128$, wartość największa to $M = 3$.

Przykład **6.4**:

Wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$ oraz znajdź punkty przegięcia wykresu tej funkcji.

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{-2/3} \cdot (-3x^2) = -x^2(1 - x^3)^{-2/3}$ dla $x \neq 1$,
  $f''(x) = -2x(1 - x^3)^{-2/3} - x^2 \cdot (-2/3)(1 - x^3)^{-5/3} \cdot (-3x^2) = -2x(1 - x^3)^{-5/3}$ dla $x \neq 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 - x^3 < 0 \end{cases}$ albo $\begin{cases} x < 0 \\ 1 - x^3 > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x > 1$ albo $x < 0$
  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
  Zatem $f(x)$ jest ściśle wypukła na $(-\infty, 0)$ i na $(1, \infty)$, ściśle wklęsła na $(0, 1)$.
- $f'(0)$ istnieje, więc punkt $(0, f(0)) = (0, 1)$ jest punktem przegięcia wykresu $f(x)$
- $f(x)$ jest ciągła w $x_0 = 1$ oraz $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 - (1 + \Delta x)^3} - 0}{\Delta x} =$
  $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{-\Delta x(3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt[3]{\dfrac{-(3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2)}{(\Delta x)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{-3}{0+}} = -\infty$
  Zatem istnieje pochodna niewłaściwa $f'(1)$, a stąd punkt $(1, f(1)) = (1, 0)$ jest punktem przegięcia wykresu $f(x)$

Odp: $f(x)$ jest ściśle wypukła na $(-\infty, 0)$ i na $(1, \infty)$, ściśle wklęsła na $(0, 1)$. Wykres $f(x)$ ma dwa punkty przegięcia $(0, 1)$ i $(1, 0)$.

Przykład **6.5**:

Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ i naszkicuj jej wykres.

1. Ustalenie dziedziny funkcji.
   $D_f : x > 0$
2. Wskazanie podstawowych własności funkcji (takich jak ciagłość, miejsca zerowe, parzystość, nieparzystość, okresowość)
   - $f(x)$ jest ciągła na D_f jako funkcja elementarna
   - $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
     Zatem $f(x)$ ma jedno miejsce zerowe $x_0 = 0$
3. Obliczenie granic lub wartości funkcji na ”krańcach” dziedziny, znalezienie asymptot pionowych i ukośnych.
   - f może mieć jedynie asymptotę pionową prawostronną w $x_0 = 0$ oraz asymptotę ukośną w ∞
   - $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{-\infty}{0+} = -\infty \cdot \infty = -\infty$
     Zatem prosta $l : x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $f(x)$
   - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$
     Zatem prosta $l : y = 0$ jest asymptotą poziomą $f(x)$ w ∞

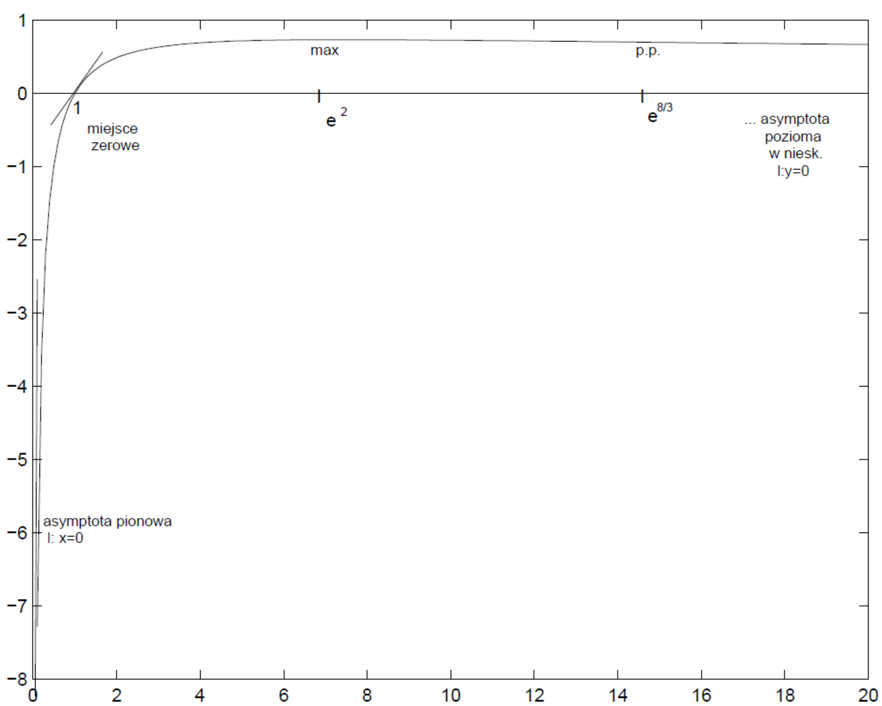
4. Ustalenie przedziałów monotoniczności funkcji, wyznaczenie ekstremów.

- $f^{'}(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$,
  przy czym mianownik $2x\sqrt{x} > 0$ dla każdego $x \in D_f$
- $f^{'}(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x > 0, x \in D_f \Leftrightarrow 0 < x < e^2$
  $f^{'}(x) < 0 \Leftrightarrow x > e^2$
- $f(x)$ jest ciągła w $x_0 = e^2$
- zatem $f(x)$ jest rosnąca na $(0, e^2)$, malejąca na (e^2, ∞), ma w $x_0 = e^2 \approx 7,39$ maksimum lokalne właściwe, $f(e^2) = \frac{2}{e} \approx 0,73$

5. Ustalenie przedziałów wklęsłości i wypukłości funkcji, wyznaczenie punktów przegięcia wykresu funkcji.

- $f^{''}(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x\sqrt{x} - (2 - \ln x) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x})^2} = \dfrac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$ dla $x \in D_f$, przy czym mianownik jest > 0
- $f^{''}(x) > 0 \Leftrightarrow 3\ln x - 8 > 0, x \in D_f \Leftrightarrow x > e^{8/3}$
  $f^{''}(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{8/3}$
  $f^{'}(e^{8/3})$ istnieje.
  Zatem $f(x)$ jest ściśle wypukła na $(e^{8/3}, \infty)$, ściśle wklęsła na $(0, e^{8/3})$, a punkt $(e^{8/3}, f(e^{8/3})) = (e^{8/3}, 8e^{-4/3}/3)$ jest punktem przegięcia wykresu $f(x)$
  $e^{8/3} \approx 14,39$, $f(e^{8/3}) \approx 0,7$, $f^{'}(e^{8/3}) = -1/(3e^4) \approx -0,006$

6. Sporządzenie wykresu funkcji.



Przykłady **6.6***:

(a) Uzasadnij, że $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ dla każdego $x \in (-1, 1)$.
Uzasadnienie:

- $f(x) = \sin(\arccos x)$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $I = (-1, 1)$, $x_0 = 0 \in I$
- $f(x_0) = f(0) = \sin(\pi/2) = 1 = g(0) = g(x_0)$
- $f'(x) = \cos(\arccos x) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ dla $x \in I$
  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in I$
  Zatem $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in I$

Wniosek: $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I$. □

(b) Uzasadnij, że $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla każdego $x \in [-1, 1]$.
Uzasadnienie:

- $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$, $I = (-1, 1)$, $x_0 = 0 \in I$
- $f(x_0) = f(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2 = g(0) = g(x_0)$
- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ dla $x \in I$
  $g'(x) = 0$ dla $x \in I$
  Zatem $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in I$
- Wynika stąd, że $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I$.
- $f(1) = \pi/2 + 0 = g(1)$, $f(-1) = -\pi/2 + \pi = g(-1)$

Wniosek: $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in [-1, 1]$. □