Analiza Matematyczna

Przykłady: **Wzór Maclaurina.**

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykład **7.1**:

Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \qquad \text{dla } |x| \leqslant 0.1$$

- Zastosujemy wzór Maclaurina dla $f(x) = \ln(1+x)$ i $n = 3$ (bo wielomian we wzorze jest stopnia 2)
- $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
  $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$
  $f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$
- $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$
- $\ln(1+x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + R_3 = 0 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{-1}{2!}x^2 + R_3 = x - \dfrac{x^2}{2} + R_3$,
  gdzie $R_3 = \dfrac{f'''(c)}{3!}x^3 = \dfrac{\frac{2}{(1+c)^3}}{6}x^3 = \dfrac{1}{3(1+c)^3}x^3$ dla pewnego c spomiędzy x i 0.
- Zatem różnica $\left|\ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)\right| = |R_3|$.
  Szukamy oszacowania tej różnicy dla $|x| \leqslant 0.1$.
- Ponieważ $|x| \leqslant 0.1$, a c leży pomiędzy x i 0, więc $|c| \leqslant 0.1$.
  Stąd $|R_3| = \dfrac{1}{3|1+c|^3}|x|^3 \leqslant \dfrac{1}{3|1-0.1|^3}|0.1|^3 = \dfrac{1}{3\cdot 9^3} = \dfrac{1}{2187} \leqslant 10^{-3}$.
  (albo mniej dokładnie $\ldots = \dfrac{1}{3\cdot 9^3} = \dfrac{1}{27\cdot 81} \leqslant 10^{-2}$)
- **Wniosek:** Dla $|x| \leqslant 0.1$ mamy $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2}$ z dokładnością rzędu 10^{-3} (w wersji rozwiązania mniej dokładnej - rzędu 10^{-2}).

Przykłady **7.2**:

(a) Stosując wzór Maclaurina oblicz $\sqrt{e}$ z dokładnością 10^{-3}.

- $f(x) = e^x$. Chcemy oszacować $f(0.5) = \sqrt{e}$ z dokładnością 10^{-3}.
- Dla dowolnego naturalnego n mamy $f'(x) = f^{(n)}(x) = e^x$ oraz $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$
- Zatem $e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n =$

  $= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$

  gdzie $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = \frac{e^c}{n!}x^n$ dla pewnego c spomiędzy x i 0.
- Dla $x = 0.5$ mamy więc $\sqrt{e} = 1 + 0.5 + \frac{1}{2!}(0.5)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(0.5)^{n-1} + R_n,$

  gdzie $R_n = \frac{e^c}{n!}(0.5)^n$ dla pewnego $c \in (0, 0.5)$.
- Stąd $\sqrt{e} \approx 1 + 0.5 + \frac{1}{2!}(0.5)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}(0.5)^{n-1}$

  z dokładnością rzędu $|R_n| = \frac{e^c}{n!}(0.5)^n$ dla pewnego $c \in (0, 0.5)$.
  Skorzystamy z tego wzoru przybliżonego z takim n, dla którego $|R_n| \leqslant 10^{-3}$ (bo wtedy uzyskamy zakładaną dokładność). Poszukamy teraz takiego n.
- Ponieważ $c \in (0, 0.5)$ oraz $e < 3 < 4$, mamy $|R_n| = \frac{e^c}{n!}(0.5)^n \leqslant \frac{4^{1/2}}{2^n n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}n!}$.

  Dla $n = 2$ mamy $|R_2| \leqslant \frac{1}{4}$.
  Dla $n = 3$ mamy $|R_3| \leqslant \frac{1}{24}$.
  Dla $n = 4$ mamy $|R_4| \leqslant \frac{1}{192}$.
  Dla $n = 5$ mamy $|R_5| \leqslant \frac{1}{1920} \leqslant 10^{-3}$.
  Zatem $n = 5$ pozwala uzyskać przybliżenie $\sqrt{e}$ z założoną dokładnością 10^{-3}.

Odp: $\sqrt{e} \approx 1 + 0.5 + \frac{1}{2!}(0.5)^2 + \frac{1}{3!}(0.5)^3 + \frac{1}{4!}(0.5)^4 = \frac{211}{128} = 1.6484375$ z dokładnością 10^{-3}.

(dla porównania wartość z kalkulatora to 1.648721271)

(b) Stosując wzór Maclaurina oblicz $\cos(0.2)$ z dokładnością 10^{-4}.

- $f(x) = \cos x$. Chcemy oszacować $f(0.2) = \cos(0.2)$ z dokładnością 10^{-4}.
  $f(x)$ jest funkcją parzystą, więc będziemy stosować wzór Maclaurina dla parzystych n (wynika to stąd, że dla parzystej funkcji dla nieparzystych k pochodne $f^{(k)}(0) = 0$); szukamy n zapewniajacego dokładność 10^{-4}

- Przyjmijmy $n = 2$.
  $f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x$
  $f(0) = 1,\ f'(0) = 0$
  $\cos x = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + R_2 = 1 + R_2,$
  gdzie $R_2 = \dfrac{f''(c)}{2!}x^2 = \dfrac{-\cos c}{2!}x^2$ dla pewnego c spomiędzy x i 0.
  Dla $x = 0.2$ mamy więc $\cos(0.2) \approx 1$ z dokładnością rzędu $|R_2| = \dfrac{|-\cos c|}{2}(0.2)^2 \leqslant 2\cdot 10^{-2}$ dla pewnego $c \in (0; 0.2)$.
  Ale ta dokładność jest zbyt mała.

- Przyjmijmy $n = 4$.
  $f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x$
  $f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0$
  $\cos x = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_4 = 1 - \dfrac{x^2}{2} + R_4,$
  gdzie $R_4 = \dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \dfrac{\cos c}{4!}x^4$ dla pewnego c spomiędzy x i 0.
  Dla $x = 0.2$ mamy więc $\cos(0.2) \approx 1 - \dfrac{(0.2)^2}{2} = 0.98$
  z dokładnością rzędu $|R_4| = \dfrac{|\cos c|}{24}(0.2)^4 \leqslant \dfrac{2}{3}10^{-4} \leqslant 10^{-4}$ dla pewnego $c \in (0, 0.2)$
  (dokładność taka, jakiej zażądano w zadaniu.)

Odp: $\cos(0.2) \approx 0.98$ z dokładnością 10^{-4}.
(dla porównania wartość z kalkulatora to 0.980066577)