Analiza Matematyczna

Przykłady: Całki oznaczone.

Opracowanie: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Przykład **9.1**:

Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz faktu, że funkcja ciągła jest całkowalna, oblicz $\int\limits_{-1}^{0} e^x dx$ przyjmując podział równomierny.

- Skorzystamy z faktu:

  Jeżeli $f(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$, to

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

- Funkcja $f(x) = e^x$ jest ciągła na odcinku $[-1, 0]$, zatem jest na tym odcinku całkowalna.
- Stąd $\int\limits_{-1}^{0} e^x dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-1+\frac{k}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{n} e^{\frac{1}{n}} \frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} =$

  $= e^{-1}(1-e) \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} \dfrac{-1}{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = e^{-1}(1-e) \cdot 1 \cdot \dfrac{-1}{1} = 1 - \dfrac{1}{e}$

Przykłady **9.2**:

Korzystajac z twierdzenia Newtona-Leibniza oblicz podane całki oznaczone.

(a) $\int\limits_{-1}^{0} e^x dx$

- Funkcja $f(x) = e^x$ jest ciągła na odcinku $[-1, 0]$ oraz $e^x = (e^x)'$
- Zatem $\int\limits_{-1}^{0} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \dfrac{1}{e}$

(b) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x^2+1}$

- Funkcja $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ jest ciągła na odcinku $[0, 1]$ oraz $\dfrac{1}{x^2+1} = (\text{arctg}x)'$
- Zatem $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x^2+1} = \text{arctg}x\Big|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\int\limits_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$

- Funkcja $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ jest ciągła na odcinku $[1, 4]$
  oraz $\frac{2}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = \left(2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(4\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)'$
- Zatem $\int\limits_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx = \left(4\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 =\right.$
  $= \left(4 \cdot 2 - \frac{10}{3} \cdot 8 + D\frac{2}{2}\right) - \left(4 - \frac{10}{3} + 2\right) = -\frac{61}{3}$

Przykład **9.3**:

Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz faktu, że funkcja ciągła jest całkowalna, uzasadnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

- Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(0 + \frac{k}{n}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$
  dla $f(x) = x^2$, $a = 0$ i $b = 1$.
- Ponieważ $f(x) = x^2$ jest ciągła na $[0, 1]$, granica ta jest równa całce:
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(0 + \frac{k}{n}\right)^2 = \int\limits_0^1 x^2 dx$
- Ponadto, $x^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)'$, więc $\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$
- Otrzymujemy stąd, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$

Przykłady **9.4**:

Metodą całkowania przez części oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int\limits_0^\pi x \sin x dx$

- $\int\limits_0^\pi x \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} f = x & g' = \sin x \\ f' = 1 & g = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right] = (-x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x dx =$
  $= (-\pi\cos\pi + 0\cos 0) + \int\limits_0^\pi \cos x dx = \pi + (\sin x\Big|_0^\pi = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$

(b) $\int\limits_0^1 e^x \sin(\pi x)dx$

- $\int\limits_0^1 e^x \sin(\pi x)dx = \begin{bmatrix} f = \sin(\pi x) & g' = e^x \\ f' = \pi\cos(\pi x) & g = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix} = (e^x \sin(\pi x)\Big|_0^1 - \pi \int\limits_0^1 e^x \cos(\pi x)dx =$

  $= (e\sin\pi - \sin 0) - \pi \int\limits_0^1 e^x \cos(\pi x)dx = \begin{bmatrix} f = \cos(\pi x) & g' = e^x \\ f' = -\pi\sin(\pi x) & g = e^x \end{bmatrix} =$

  $= 0 - \pi\left((e^x\cos(\pi x)\Big|_0^1 + \pi\int\limits_0^1 e^x \sin(\pi x)dx\right) = -\pi(e\cos\pi - \cos 0) - \pi^2\int\limits_0^1 e^x\sin(\pi x)dx$

- Zatem $(1+\pi^2)\int\limits_0^1 e^x \sin(\pi x)dx = -\pi(-e-1)$.

- Stąd otrzymujemy $\int\limits_0^1 e^x \sin(\pi x)dx = \dfrac{\pi(e+1)}{1+\pi^2}$

Przykłady **9.5**:

Oblicz podane całki oznaczone stosując odpowiednie podstawienia:

(a) $$\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx = \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = (x^2)'dx = 2xdx \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 4 \end{array}\end{array}\right] = \int\limits_0^4 e^y \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}e^y\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4-1)$$

(b) $$\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}} = \left[\begin{array}{l} y = 5-4x \\ x = (5-y)/4 \\ dx = -\frac{1}{4}dy \\ \begin{array}{c|r|c} x & -1 & 1 \\ \hline y & 9 & 1 \end{array}\end{array}\right] = \int\limits_9^1 \frac{\frac{1}{4}(5-y)(-\frac{1}{4})dy}{\sqrt{y}} = +\frac{1}{16}\int\limits_1^9 (5y^{-1/2} - y^{1/2})dy =$$

$$= \frac{1}{16}\left(5\frac{y^{1/2}}{1/2} - \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{16}\left(\left(10\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3\right) - \left(10 - \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{6}\right.$$

Przykłady **9.6***:

Wykorzystując własności całek z funkcji parzystych, nieparzystych, okresowych uzasadnij podane równości:

(a) $\int\limits_{-1}^1 e^{x^2}\sin x dx = 0$

- Równość wynika z tego, że funkcja $f(x) = e^{x^2}\sin x$ jest nieparzysta ($f(-x) = e^{(-x)^2}\sin(-x) = -e^{x^2}\sin x = -f(x)$), a przedział całkowania $[-1,1]$ jest symetryczny względem 0.

(b) $\int\limits_{-3}^3 x\sin^3 x dx = 2\int\limits_0^3 x\sin^3 x dx$

- Równość wynika z tego, że funkcja $f(x) = x\sin^3 x$ jest parzysta ($f(-x) = -x\sin^3(-x) = -x(-\sin x)^3 = f(x)$), a przedział całkowania $[-3,3]$ jest symetryczny względem 0.

(c) $\int\limits_{-\pi}^{5\pi} \frac{\sin^5 x}{1+\cos x} dx = 0$

- Funkcja $f(x) = \frac{\sin^5 x}{1+\cos x}$ jest okresowa o okresie $T = 2\pi$.
  Zatem $\int\limits_{-\pi}^{5\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int\limits_{\pi}^{3\pi} f(x)dx + \int\limits_{3\pi}^{5\pi} f(x)dx = 3 \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
- $f(x)$ jest także nieparzysta ($f(-x) = \frac{\sin^5(-x)}{1+\cos(-x)} = \frac{(-\sin x)^5}{1+\cos x} = -f(x)$), a przedział całkowania $[-\pi, \pi]$ jest symetryczny względem 0, więc $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.
- Zatem $\int\limits_{-\pi}^{5\pi} \frac{\sin^5 x}{1+\cos x} dx = 3 \cdot 0 = 0$

Przykłady **9.7***:

Oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int\limits_{-2}^{10} g(x)dx$, gdzie $g(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Z} - \{0\} \\ \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{cases}$.

- $g(x)$ ma „luki" w punktach -2, 2, 3, ...,10.
  Domykajac te luki otrzymujemy $f(x) = x$, przy czym zbiór $\{x \in [-2, 10] : f(x) \neq g(x)\}$ jest skończony.
  Zatem $\int\limits_{-2}^{10} g(x)dx = \int\limits_{-2}^{10} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{10} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{10} = \frac{100}{2} - \frac{4}{2} = 48$

(b) $\int\limits_{0}^{5/2} E(x)dx$

- Funkcja ma „skoki" w punktach 1 i 2, dlatego dzielimy przedział całkowania w tych miejscach.
  Zatem $\int\limits_{0}^{5/2} E(x)dx = \int\limits_{0}^{1} E(x)dx + \int\limits_{1}^{2} E(x)dx + \int\limits_{2}^{5/2} E(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{2} 1dx + \int\limits_{2}^{5/2} 2dx =$
  $= 0 + (x\Big|_{1}^{2} + (2x\Big|_{2}^{5/2} = (2-1) + 2(5/2-2) = 2$

(c) $\int\limits_{-1}^{3} |x-2|dx$

- $f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x & \text{dla} \quad x < 2 \\ x-2 & \text{dla} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.
  $x_0 = 2$ to miejsce zmiany wzoru, więc tu dzielimy przedział całkowania
  Zatem $\int\limits_{-1}^{3} |x-2|dx = \int\limits_{-1}^{2} |x-2|dx + \int\limits_{2}^{3} |x-2|dx = \int\limits_{-1}^{2} (2-x)dx + \int\limits_{2}^{3} (x-2)dx =$
  $= \left(2x - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{2}^{3} = ((4-2) - (-2-1/2)) + ((9/2-6) - (2-4)) = 5\right.\right.$

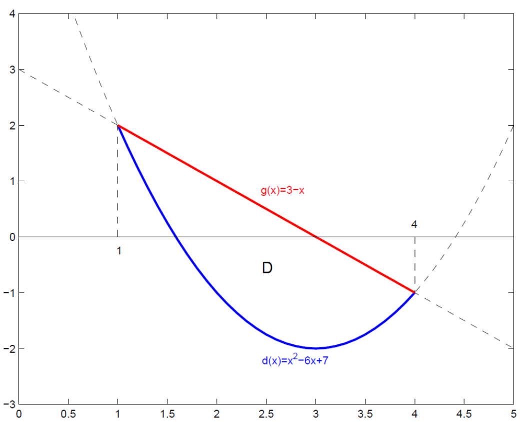
Przykłady $\boxed{\mathbf{9.8}}$:

(a) Oblicz pole obszaru D ograniczonego krzywymi $y = x^2 - 6x + 7$ i $y = 3 - x$.

- Szukamy punktów wspólnych podanych krzywych:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 7 &= 3 - x \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Delta = 25 - 16 &= 9 \\ x_1 = \frac{5-3}{2} &= 1 \\ x_2 = \frac{5+3}{2} &= 4 \end{aligned}$$

- Szkicujemy rysunek:



- Zatem $a = 1$, $b = 4$, $g(x) = 3 - x$, $d(x) = x^2 - 6x + 7$
Obszar $D = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 4, x^2 - 6x + 7 \leqslant y \leqslant 3 - x\}$
Obliczamy pole obszaru D:
$|D| = \int\limits_a^b (g(x) - d(x))\, dx = \int\limits_1^4 ((3 - x) - (x^2 - 6x + 7))\, dx = \int\limits_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\, dx =$
$= \left(-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x\right|_1^4 = \left(-\frac{4^3}{3} + 5 \cdot \frac{4^2}{2} - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 4\right) =$
$= \frac{1-64}{3} + 15 \cdot 2.5 - 12 = -21 + 37.5 - 12 = 4.5$

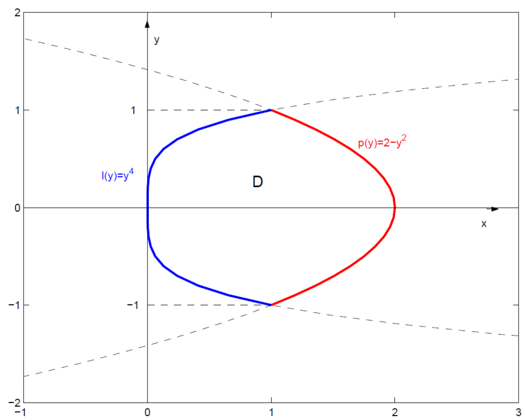
- **Odp.** $|D| = 4.5 > 0$

(b) Oblicz pole obszaru D ograniczonego krzywymi $x = 2 - y^2$ i $x = y^4$.

- Szukamy punktów wspólnych podanych krzywych:

$$\begin{aligned}
2 - y^2 &= y^4 \\
(y^2)^2 + y^2 - 2 &= 0 \\
t = y^2 & \\
t^2 + t - 2 &= 0 \\
\Delta = 1 + 8 &= 9 \\
t_1 = \frac{-1-3}{2} &= -2 < 0 \\
t_2 = \frac{-1+3}{2} &= 1 \\
y^2 = t_2 &= 1 \\
y_1 &= -1 \\
y_2 &= 1
\end{aligned}$$

- Szkicujemy rysunek:

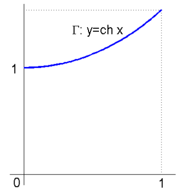


- Zatem $a = -1$, $b = 1$, $l(y) = y^4$, $p(y) = 2 - y^2$
  Obszar $D = \{(x, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1, y^4 \leqslant x \leqslant 2 - y^2\}$
  Obliczamy pole obszaru D:
  $$|D| = \int_a^b (p(y) - l(y))\, dy = \int_{-1}^{1} ((2 - y^2) - y^4)\, dy = \begin{bmatrix}\text{funkcja parzysta,} \\ \text{przedział całkowania} \\ \text{symetryczny względem 0}\end{bmatrix} =$$
  $$= 2\int_0^1 (2 - y^2 - y^4)\, dy = 2\left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right|_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{44}{15}$$

- **Odp.** $|D| = \frac{44}{15} > 0$

Przykład $\boxed{9.9}$:

Oblicz długość krzywej $\Gamma : y = \text{ch}x, 0 \leqslant x \leqslant 1$.



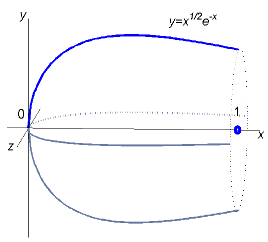
- $a = 0,\ b = 1,\ f(x) = \text{ch}x,\ f^{'}(x) = \text{sh}x$ - ciągła na $[0, 1]$.
- Długość krzywej Γ wynosi:
$$|\Gamma| = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \text{sh}^2 x}\, dx = \int\limits_0^1 \text{ch}x\, dx = \text{sh}x\Big|_0^1 = \text{sh}1 - \text{sh}0 = \frac{e - e^{-1}}{2}$$
(Skorzystaliśmy z faktu, że $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ oraz $\text{ch}x \geqslant 0$ dla każdego x.)

- **Odp.** $|\Gamma| = \dfrac{e - e^{-1}}{2} > 0$

Przykłady $\boxed{9.10}$:

(a) Oblicz objętość bryły V_1 powstałej przez obrót figury $D : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\, e^{-x}$

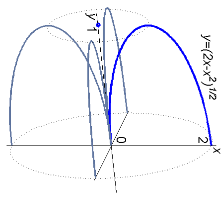
wokół osi Ox.



- $a = 0,\ b = 1,\ f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$ jest nieujemna i ciągła na $[0, 1]$.
- Zatem objętość bryły V_1 równa jest:
$$|V_1| = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx = \pi \int\limits_0^1 (\sqrt{x}\, e^{-x})^2\, dx = \pi \int\limits_0^1 xe^{-2x}\, dx = \begin{bmatrix} f = x & g^{'} = e^{-2x} \\ f^{'} = 1 & g = \int e^{-2x} dx = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{bmatrix} =$$
$$= \pi \left(\left(-\frac{1}{2} xe^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x}\, dx \right) = \frac{\pi}{2} \left(-e^{-2} + \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(-e^{-2} - \frac{e^{-2} - 1}{2} \right) =$$
$$= \frac{\pi(e^2 - 3)}{4e^2}$$

- **Odp.** $|V_1| = \dfrac{\pi(e^2 - 3)}{4e^2} > 0$

(b) Oblicz objętość bryły V_2 powstałej przez obrót figury $D : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2}$

wokół osi Oy. 

- $a = 0,\ b = 2,\ f(x) = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{(2-x)x}$ jest nieujemna i ciągła na $[0, 2]$.
- Zatem objętość bryły V_2 równa jest:

$$|V_2| = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{2x - x^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} {\scriptstyle 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2} \\ {\scriptstyle x\sqrt{2x-x^2} = (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \sqrt{1-(x-1)^2}} \end{array} \right] =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^2 (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\, dx + \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx \right) = \left[\begin{array}{l} y = x - 1 \\ dy = dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & -1 & 1 \end{array} \end{array} \right] =$$

$$= 2\pi \left(\int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^2}\, dy + \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}\, dy \right) = 2\pi \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) = \pi^2$$

Obliczenia pomocnicze:

$\int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^2}\, dy = 0$, gdyż całkujemy funkcję nieparzystą po przedziale symetrycznym względem 0.

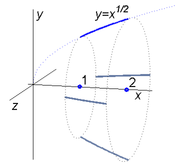
$\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}\, dy = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$, gdyż wykresem funkcji $f(y) = \sqrt{1-y^2}$ jest półokrąg o promieniu 1 i środku $(0, 0)$, a całka to pole pod wykresem, czyli pole półkoła o promieniu 1.

- **Odp.** $|V_2| = \pi^2 > 0$

Przykłady $\boxed{9.11}$:

(a) Oblicz pole powierzchni Σ_1 powstałej przez obrót krzywej $\Gamma : 1 \leqslant x \leqslant 2,\ y = \sqrt{x}$

wokół osi Ox.



- $a = 1,\ b = 2,\ f(x) = \sqrt{x},\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ jest ciągła na $[1, 2]$.
- Zatem pole powierzchni Σ_1 równe jest:

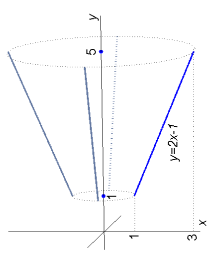
$$|\Sigma_1| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x+1}\, dx = \left[\begin{array}{c} y = 4x+1 \\ dy = 4dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline y & 5 & 9 \end{array} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^9 \sqrt{y}\, dy = \frac{\pi}{4} \left(\frac{y^{3/2}}{3/2} \right|_5^9 = \frac{\pi}{6}(27 - 5\sqrt{5})$$

- **Odp.** $|\Sigma_1| = \dfrac{\pi}{6}(27 - 5\sqrt{5}) > 0$

(b) Oblicz pole powierzchni Σ_2 powstałej przez obrót krzywej $\Gamma : 1 \leqslant x \leqslant 3,\ y = 2x - 1$

wokół osi Oy.



- $a = 1,\ b = 3,\ f(x) = 2x - 1,\ f'(x) = 2$ jest ciągła na $[1, 3]$.
- Zatem pole powierzchni Σ_2 równe jest:

$$|\Sigma_2| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_1^3 x\sqrt{1+4}\, dx = 2\pi\sqrt{5} \int_1^3 x\, dx = \pi\sqrt{5} \left(x^2 \right|_1^3 =$$

$$= \pi\sqrt{5}\,(9 - 1) = 8\pi\sqrt{5}$$

- **Odp.** $|\Sigma_2| = 8\pi\sqrt{5} > 0$