MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Martyna Majda**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 10 z listy 1.

Wyznaczyć środek masy krzywej płaskiej α z funkcją gęstości masy $\sigma \equiv 1$,
gdzie $\alpha\colon y = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$, $1 \le x \le 3$.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy następujące wzory:

Przy założeniu, że $f'(x)$ i $\sigma(x)$ są ciągłe na $[a, b]$,

$$\textit{masa krzywej } \alpha\colon y = f(x) \textit{ o gęstości masy } \sigma(x) \textit{ wynosi } M = \int\limits_a^b \sigma(x)\sqrt{1 + \left(f'\right)^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\textit{moment statyczny krzywej } \alpha \textit{ względem } 0x \textit{ to } M_x = \int\limits_a^b \sigma(x)\, f(x)\sqrt{1 + \left(f'\right)^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\textit{moment statyczny krzywej } \alpha \textit{ względem } 0y \textit{ to } M_y = \int\limits_a^b \sigma(x)\, x\sqrt{1 + \left(f'\right)^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\textit{współrzędne środka masy } S = (x_s,\, y_s) \textit{ krzywej } \alpha \textit{ to } x_s = \frac{M_y}{M}, \quad y_s = \frac{M_x}{M} \tag{4}$$

W przypadku badanej krzywej mamy:

- $a = 1$, $b = 3$,
- $\sigma \equiv 1$ - ciągła na $[1, 3]$,
- funkcja $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$
- pochodna funkcji $f(x)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right)\right)' = \left(\sqrt{x}\left(\frac{3-x}{3}\right)\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{3-x}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\sqrt{x} =$$
$$= \frac{3-x}{6\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{9-3x-6x}{18\sqrt{x}} = \frac{9(1-x)}{18\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \text{ istnieje i jest ciągła na } [1,\, 3],$$

Ponadto dla $x \in [1, 3]$

$$\sqrt{1 + \left(f'\right)^2(x)} = \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x + 1 - 2x + x^2}{4x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}},$$

co wykorzystamy w dalszych rachunkach.

Wyznaczamy masę krzywej α na podstawie wzoru (1):

$$M = \int_1^3 1 \cdot \frac{1+x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^3 + \sqrt{x}\Big|_1^3 = 2\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{3} =$$
$$= 2\left(\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right)$$

Wyznaczamy moment statyczny krzywej α względem $0x$ na podstawie wzoru (2):

$$M_x = \int_0^3 1\cdot\left(\cancel{\sqrt{x}}\left(1-\frac{x}{3}\right)\right)\cdot\frac{1+x}{2\cancel{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3\left(1-\frac{x}{3}\right)\cdot(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3\left(1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(3-1+\frac{3^{\cancel{2}}}{\cancel{3}}-\frac{1}{3}-\frac{3^{\cancel{3}}}{\cancel{9}}+\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(2-\frac{(3-1)}{9}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9} = \frac{8}{9}$$

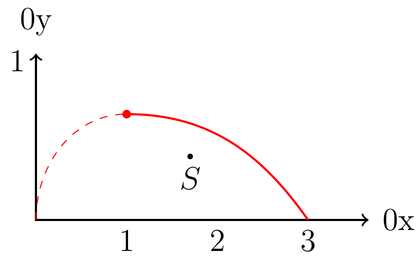
Wyznaczamy moment statyczny krzywej α względem $0y$ na podstawie wzoru (3):

$$M_y = \int_1^3 1\cdot x\cdot\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_1^3 x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^3 + \frac{\cancel{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\left(3^2\cdot\sqrt{3}-1\right) + \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right) = \frac{9+5}{5}\sqrt{3} - \frac{6}{5} = \frac{2}{5}\left(7\sqrt{3}-3\right)$$

Ze wzoru (4) otrzymujemy:

$$x_s = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{2}{5}\left(7\sqrt{3}-3\right)}{2\left(\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\left(7\sqrt{3}-3\right)\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\right)}{5\left(3-\frac{4}{9}\right)} = \frac{19+\frac{5}{3}\sqrt{3}}{\frac{115}{9}} = \frac{9\left(19+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)}{115} \approx 1.71$$

$$y_s = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{\cancel{8}^{\,4}}{9}}{\cancel{2}\left(\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right)}{9\left(3-\frac{4}{9}\right)} = \frac{4\sqrt{3}+\frac{8}{3}}{23} \approx 0.42$$



Rysunek 1: Czerwona linia ciągła - krzywa płaska α: $y = \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{3}\right)$, gdy $1 \leq x \leq 3$.
S - środek masy tej krzywej dla gęstości masy $\sigma \equiv 1$.

Odp.: Szukany środek masy to punkt $S = (x_s,\, y_s) = \left(\frac{9\left(19+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)}{115},\ \frac{4\sqrt{3}+\frac{8}{3}}{23}\right)$.