MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Wioletta Koperska**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 11 z listy 1.

Znaleźć środek masy obszaru płaskiego D z funkcją gęstości masy $\sigma = c =$const.

(a) D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{2x}{\pi}$, $y = \sin x$ $(x \geqslant 0)$;

(b) D - obszar ograniczony krzywą $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$ i osiami współrzędnych.

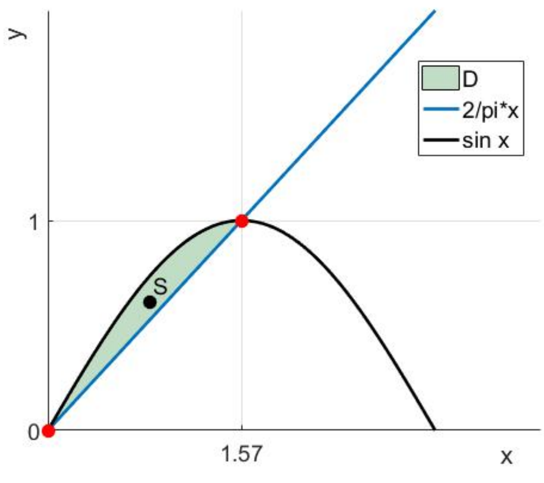
Rozwiązanie:

Jeżeli obszar D jest postaci $D = \{(x, y) : f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$, gdzie f, g – ciągłe na $[a, b]$, oraz gęstość masy tego obszaru jest stała i równa σ, to

- masa obszaru D wynosi $M = \sigma \int\limits_a^b (g(x) - f(x))dx$,
- moment statyczny względem osi Ox równy jest $M_x = \frac{\sigma}{2} \int\limits_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$,
- moment statyczny względem osi Oy to $M_y = \sigma \int\limits_a^b x(g(x) - f(x))dx$,
- środek masy $S = (x_S, y_S)$ ma współrzędne równe $x_S = \frac{M_y}{M}$, $y_S = \frac{M_x}{M}$.

Przyjmiemy, że $\sigma = 1$ w celu uproszczenia obliczeń, ponieważ wartość stałej σ nie ma wpływu na współrzędne środka masy.

Ad (a)
- Szukamy miejsc przecięcia wykresów ciągłych funkcji $g(x) = \sin x$ i $f(x) = \frac{2x}{\pi}$ dla $x \geqslant 0$



- Mamy $\frac{2x}{\pi} = \sin x, x \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = \frac{\pi}{2}$
- Zatem $D = \left\{ (x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\; \frac{2x}{\pi} \leqslant y \leqslant \sin x \right\}$
- Wyliczamy:
  $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2x}{\pi} \right) dx = -\cos x - \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$
- $M_x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx}_{I_2}$, przy czym

  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4},$

  $I_2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8}.$

  Zatem $M_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^3}{3 \cdot 8} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{2}{3} \right) \pi = \frac{\pi}{24}.$
- $M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\sin x - \frac{2x}{\pi} \right) dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx}_{I_3} \underbrace{- \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx}_{I_4}$, gdzie

  $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)' dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$

  $I_4 = -\frac{2}{\pi} \cdot I_2 = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3 \cdot 8} = -\frac{\pi^2}{12}.$

  Stąd $M_y = 1 - \frac{\pi^2}{12}$
- Otrzymujemy:
  $x_S = \frac{M_y}{M} = \frac{1 - \frac{\pi^2}{12}}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{12 - \pi^2}{3(4 - \pi)} \approx 0.83$

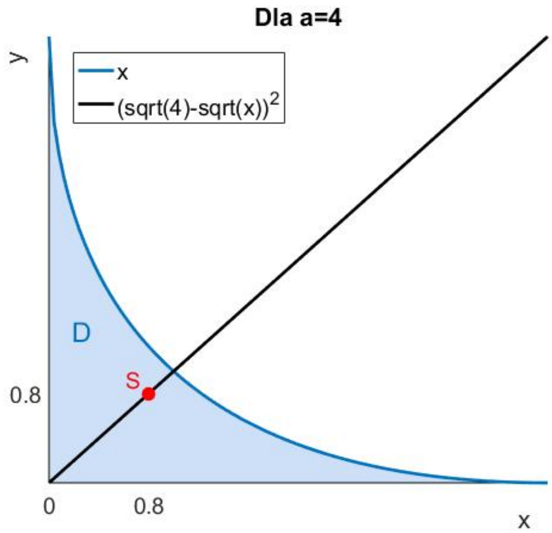
  $y_S = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{\pi}{24}}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6(4 - \pi)} \approx 0.61$
- Odp. Środek masy badanego obszaru to punkt $S = \left(\frac{12 - \pi^2}{12(4 - \pi)},\; \frac{\pi}{6(4 - \pi)} \right)$

Ad (b)

- Obszar D jest postaci

$$D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\},$$

przy czym funkcje $f(x) \equiv 0$ i $g(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ są ciągłe na $[0, a]$.



- Zauważmy, że obszar D jest symetryczny względem prostej $y = x$, a gęstość masy jest stała. Zatem środek masy będzie leżał na osi symetrii. Wiadomo więc, że $x_S = y_S$ i wystarczy wyliczyć $x_S = \dfrac{M_y}{M}$.

- Mamy $M = \int\limits_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \int\limits_0^a (a - 2\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}} + x) dx = \left[ax - 2\sqrt{a} \cdot \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right]_0^a =$

$$= a^2 - \frac{4a^2}{3} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{6}.$$

- $M_y = \int\limits_0^a x(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \int\limits_0^a (ax - 2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} + x^2) dx = \left[\dfrac{ax^2}{2} - 2\sqrt{a} \cdot \dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \dfrac{x^3}{3}\right]_0^a =$

$$= \frac{a^3}{2} - \frac{4a^3}{5} + \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{30}.$$

- Otrzymujemy $x_S = \dfrac{\frac{a^3}{30}}{\frac{a^2}{6}} = \dfrac{a}{5}$.

- Odp. Środek masy badanego obszaru to punkt $S = \left(\dfrac{a}{5}, \dfrac{a}{5}\right)$.