MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Jagoda Lewicka**, I rok, Matematyka Stosowana

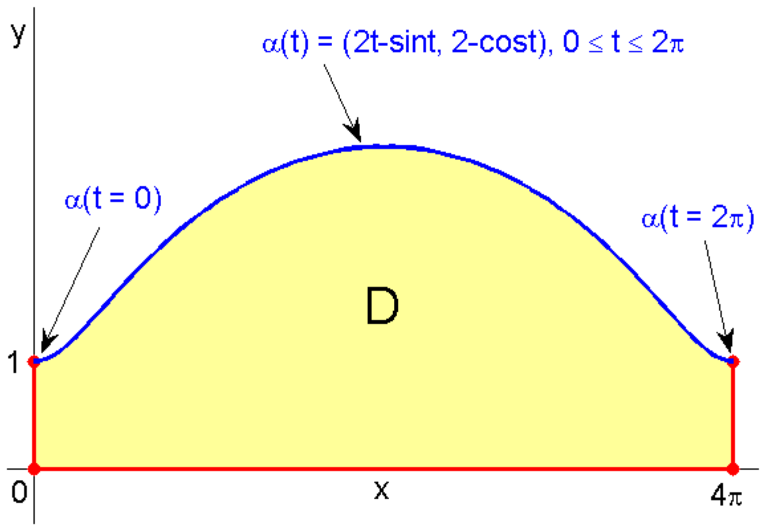
Zadanie nr 2 z listy 1.

Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywą parametryczną α i osią Ox

(a) $\alpha(t) = (2t - \sin t, 2 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.
Równoważnie, krzywa $\alpha : (x(t), y(t))$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ oraz

$$x(t) = 2t - \sin t,$$
$$y(t) = 2 - \cos t.$$

Naszkicujmy obszar D:



Zauważmy, że $x(t)$, $y(t)$ i $x'(t) = 2 - \cos t$ są ciągłe na $[0, 2\pi]$ oraz $x'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$.
Zatem pole obszaru D wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (2 - \cos t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (4 - 4\cos t + \cos t^2)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)\right] =$$
$$= 8\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 2t + 1)\,\mathrm{d}t = 8\pi + \pi = 9\pi.$$

Odp. $|D| = 9\pi$.

(b) $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t),\ -1 \le t \le 0$

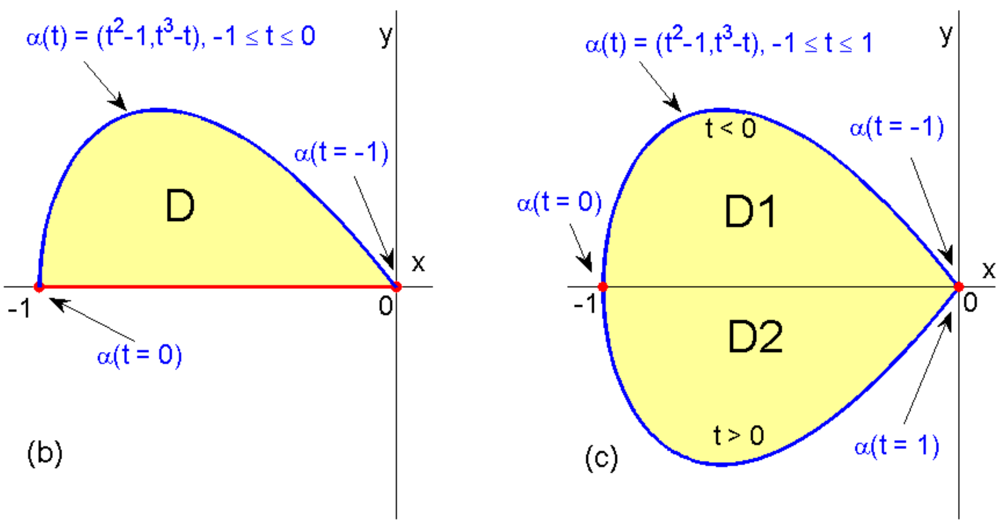
Równoważnie, krzywa $\alpha : (x(t), y(t))$, gdzie $-1 \le t \le 0$ oraz

$$x(t) = t^2 - 1,$$
$$y(t) = t^3 - t.$$

Szkic obszaru D znajduje się na Rysunku 1, (b). Ponieważ $x(t)$, $y(t)$ i $x'(t) = 2t$ są ciągłe na $[-1, 0]$ oraz $x'(t) \le 0\ \ \forall t \in [-1, 0]$, pole obszaru D wyliczyć możemy ze wzoru:

$$|D| = -\int_{-1}^{0} y(t) \cdot x'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{0} 2t(t^3 - t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{0} 2t^4\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} 2t^2\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}.$$

Odp. $|D| = \dfrac{4}{15}$.



Rysunek 1: Szkic obszaru D dla podpunktów (b) i (c).

(c) $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t),\ -1 \le t \le 1$

Zauważmy, że badany obszar $D = D_1 \cup D_2$, gdzie pole części wspólnej D_1 i D_2 wynosi 0; patrz Rysunek 1(c). Zatem $|D| = |D_1| + |D_2|$. Ponadto pole D_1 wyliczyliśmy w punkcie (b) otrzymując $|D_1| = \frac{4}{15}$, a z symetrii wynika, że $|D_1| = |D_2|$. Zatem:

Odp. $|D| = 2|D_1| = \dfrac{8}{15}$.