MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Wioletta Koperska**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 3 z listy 1.

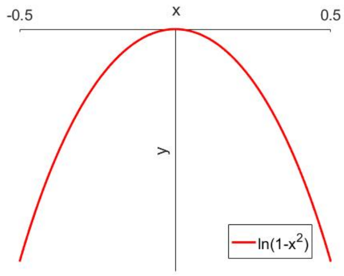
Obliczyć długość łuku podanej krzywej płaskiej α.

(a) $\alpha : y = \ln(1 - x^2),\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

- Długość łuku krzywej α: $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$, gdzie $y'(x)$ jest ciągła na $[a, b]$, wyraża się wzorem:

$$|\alpha| = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$



- W naszym przypadku $a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ y(x) = \ln(1 - x^2)$.

- Mamy:

$$y'(x) = \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \text{ – ciągła na } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (y'(x))^2} &= \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}} = \frac{|x^2 + 1|}{|x^2 - 1|} = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \text{ dla } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jest to funkcja parzysta, którą mamy scałkować po przedziale symetrycznym względem zera. Zatem

$$|\alpha| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} dx.$$

- Aby obliczyć powyższą całkę, rozkładamy całkowaną funkcję wymierną na wielomian i ułamki proste:

$$\frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-(x^2 - 1) - 2}{x^2 - 1} = -1 - \frac{2}{x^2 - 1} = -1 - \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= -1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \left[\begin{array}{l} A(x+1)+B(x-1) = -2 \\ x=1 \ \Rightarrow \ A=-1 \\ x=-1 \ \Rightarrow \ B=1 \end{array}\right] = -1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

- Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = 2\left[-\frac{1}{2} - [\ln|x-1| + \ln|x+1|\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] = \\ &= -1 + 2\left[\ln\left(\frac{|x+1|}{|x-1|}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] = 2\ln 3 - 1 > 0 \end{aligned}$$

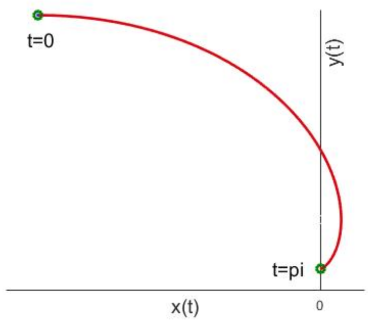
- Odp. Długość łuku krzywej α wynosi $|\alpha| = 2\ln 3 - 1$

(b) $\alpha(t) = ((t^2-2)\sin t + 2t\cos t, \ (2-t^2)\cos t + 2t\sin t), \ 0 \leqslant t \leqslant \pi$

Rozwiązanie:

- Długość krzywej α zadanej parametrycznie jako $\alpha(t) = (x(t), y(t)), \ a \leqslant t \leqslant b$, gdzie $x'(t), y'(t)$ są ciągłe na $[a,b]$, wyraża się wzorem:

$$|\alpha| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$



- W naszym przypadku $a = 0, \ b = \pi$,
  $x(t) = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$,
  $y(t) = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t$.

- Mamy:
  $x'(t) = 2t\sin t + (t^2-2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t$ - ciągła na $[0,\pi]$;
  $y'(t) = -2t\cos t - (2-t^2) + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t$ - ciągła na $[0,\pi]$.
  Ponadto $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{t^4(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{t^4} = t^2$.

- Zatem $|\alpha| = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} > 0$

- Odp. Długość łuku krzywej α wynosi $|\alpha| = \frac{\pi^3}{3}$