MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

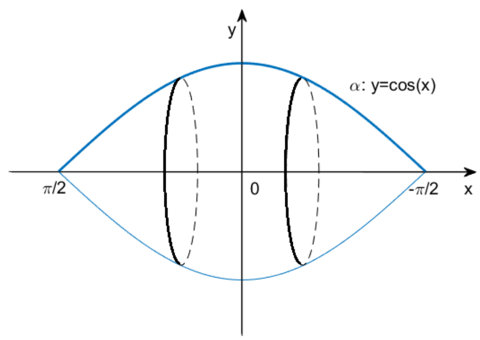
Opracowanie: **Barbara Poprawa**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 9 z listy 1.

Obliczyć pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej α wokół osi Ox

(a) α: $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

Rozwiązanie:



- Pole powierzchni S powstałej z obrotu wokół osi Ox wykresu funkcji $y = f(x)$, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, a f jest nieujemna i ma ciągłą pochodną na $[a, b]$, obliczyć możemy ze wzoru:
$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

- Dla powierzchni rozważanej w zadaniu $f(x) = \cos x$, $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$. Wiemy, że funkcja f przyjmuje wartości nieujemne na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ oraz że pochodna $f'(x) = -\sin x$ jest ciągła na tym odcinku. Mamy zatem

$$|S| = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1 + (-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\text{funkcja parzysta,}\\ \text{przedział całkowania}\\ \text{symetr. wzgl. 0}\end{array}\right] =$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\sin x = t\\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2}\\ \hline t & 0 & 1\end{array}\end{array}\right] = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\overset{*}{=} 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right).$$

$*$ Wyliczenie całki $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (jeśli nie mamy tablic całek):

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} t=\mathrm{sh}\, z \\ \mathrm{d}t=\mathrm{ch}\, z\,\mathrm{d}z \\ \sqrt{1+t^2}=\mathrm{ch}\, z \\ \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1 \\ \hline z & z_0 & z_1 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \mathrm{sh}\, z_0 = 0 \\ \left.\dfrac{e^{z_0}-e^{-z_0}}{2}=0 \ \right| \cdot 2e^{z_0} \\ e^{2z_0}-1=0 \\ z_0=0 \end{array} & \begin{array}{c} \mathrm{sh}\, z_1 = 1 \\ \left.\dfrac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}=1 \ \right| \cdot 2e^{z_1} \\ (e^{z_1})^2-1=2e^{z_1} \\ (e^{z_1})^2-2e^{z_1}-1=0 \\ \Delta=4+4=8, e^{z_1}>0 \\ e^{z_1}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \\ z_1=\ln(1+\sqrt{2}) \end{array} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{z_1} \mathrm{ch}^2 z\,\mathrm{d}z = \int_0^{z_1}\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2 \mathrm{d}z = \int_0^{z_1}\left(\frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4}\right)\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{z_1}(1+\mathrm{ch}\,(2z))\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(z+\frac{\mathrm{sh}\,(2z)}{2}\right)\Bigg|_0^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1+\mathrm{sh}\, z_1 \mathrm{ch}\, z_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{2})+1\cdot\sqrt{1+1^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right)$$

(b) α: $x=\dfrac{t^3}{3},\ y=4-\dfrac{t^2}{2}$ pomiędzy punktami jej przecięcia z osiami współrzędnych.

Rozwiązanie:

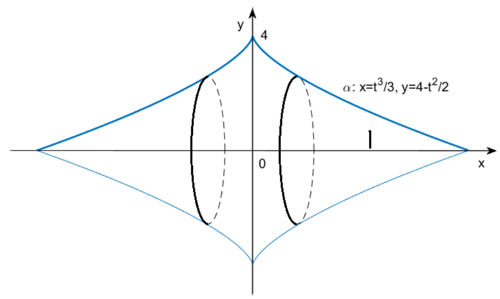
- W pierwszej kolejności wyznaczmy punkty przecięcia krzywej α z osiami współrzędnych:

$$x(t)=0 \Leftrightarrow \frac{t^3}{3}=0 \Leftrightarrow t=0,$$

zatem punkt $(x(0),y(0))=(0,4)$ to punkt przecięcia krzywej α z osią $0y$.

$$y(t)=0 \Leftrightarrow 4-\frac{t^2}{2}=0 \Leftrightarrow t=2\sqrt{2} \quad \vee \quad t=-2\sqrt{2},$$

zatem krzywa α ma dwa punkty przecięcia z osią $0x$: $(x(\pm 2\sqrt{2}),y(\pm 2\sqrt{2}))=(\pm\frac{16\sqrt{2}}{3},0)$.



- Funkcja $y(t) = 4 - \dfrac{t^2}{2}$ jest nieujemna i ma ciągłą pochodną $y^{'}(t) = -t$ na $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, a $x'(t) = t^2$ jest ciągła na tym przedziale. Zatem pole powierzchni S powstałej z obrotu wokół osi Ox krzywej α dla $a = -2\sqrt{2} \leqslant t \leqslant 2\sqrt{2} = b$ obliczyć możemy ze wzoru:

$$|S| = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

- Otrzymujemy:

$$|S| = 2\pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(4 - \frac{t^2}{2}\right)\sqrt{t^4 + t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c}\text{funkcja parzysta,}\\ \text{przedział całkowania}\\ \text{symetr. wzgl. 0}\end{array}\right] =$$

$$= 4\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(4 - \frac{t^2}{2}\right)\sqrt{(t^2+1)t^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} (8 - t^2)\sqrt{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u^2 = t^2 + 1, u \geqslant 0 \\ 2u\,\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 2\sqrt{2} \\ \hline u & 1 & 3 \end{array}\end{array}\right] = 2\pi \int_1^3 (8 - u^2 + 1)u^2\,\mathrm{d}u = 2\pi \int_1^3 (9u^2 - u^4)\,\mathrm{d}u =$$

$$= 2\pi \left(3u^3 - \frac{u^5}{5}\right|_1^3 = 2\pi \left(3^4 - \frac{3^5}{5} - 3 + \frac{1}{5}\right) = \frac{296\pi}{5}.$$