MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Karolina Stempień**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 11 z listy 2.

Wyznaczyć iloczyn Cauchy'ego podanych szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, gdzie $|q| < 1$.

Rozwiązanie:

Definicja.

Niech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *będą dowolnymi szeregami liczbowymi. Iloczynem Cauchy'ego tych szeregów nazywamy szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$*, taki że:* $c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.

(a)

- Mamy $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$, $b_n = \frac{3^n}{n!}$.
- Ponieważ
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{a,b \in \mathbb{R}} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$
mamy $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k \, 3^{n-k} = \frac{1}{n!} (-2+3)^n = \frac{1}{n!}$.
Stąd iloczynem Cauchy'ego podanych szeregów jest $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
- Zauważmy, że ze wzoru $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$, suma tego szeregu to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.
- Z tego samego wzoru mamy także: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = e^{-2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = e^3$,
a stąd $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = e^{-2} \cdot e^3 = e$ w zgodzie w poprzednim wynikiem.

(b)

- Mamy $a_n = b_n = q^n$, $|q| < 1$,
- Otrzymujemy $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} q^n = \underbrace{q^n + q^n + \ldots + q^n}_{n+1 \text{ razy}} = (n+1)\, q^n$.
- Stąd iloczynem Cauchy'ego podanych szeregów jest $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n$.
- Zauważmy, że korzystając ze wzoru $|q| < 1$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ oraz z tw. o różniczkowaniu szeregu potęgowego wyraz po wyrazie otrzymujemy, że dla $|q| < 1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n =$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(q^{n+1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\right)' = \left(q \cdot \frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1 - q - q \cdot (-1)}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$
- Postać tej sumy wywnioskować można też stąd, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2$.