MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Piotr Paduszyński**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 2 z listy 2.

Wyjaśnić dlaczego poniższe szeregi są rozbieżne

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})$; **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(-1)^n}$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zatem zbieżność ciągu (a_n) do 0 to warunek konieczny zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pokażemy, że nie jest on spełniony w przypadku badanych szeregów.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[(2n^2+1)-(2n^2-1)\right]}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

Jako że szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, nie jest on zbieżny.

(b) W tym przykładzie pokażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje:

- dla podciągu $n_k = 2k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ mamy

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} 2^{2k(-1)^{2k}} = \lim_{k\to\infty} 2^{2k} = \infty,$$

- natomiast dla $n'_k = 2k+1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty} a_{n'_k} = \lim_{k\to\infty} 2^{(2k+1)(-1)^{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} 2^{-(2k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = 0 \neq \infty.$$

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje, więc warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest spełniony. Wynika stąd, że badany szereg nie jest zbieżny.