MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Beata Biały**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 3 (a), (b) z listy 2.

(a) Zbadać zbieżność podanych szeregów liczbowych, posługując się **kryterium porównawczym**:

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są szeregami takimi, że* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0$ *oraz* $\bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geqslant n_0} a_n \leqslant b_n$, *to:*

1) jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *też jest zbieżny;*

2) jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *też jest rozbieżny.*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)$

- Wiemy, że:

$$\bigwedge_{x\in(0,\frac{\pi}{2})} \sin x > \frac{2}{\pi}x \qquad \wedge \qquad \operatorname{tg} x > x.$$

- Dodatkowo:

$$\bigwedge_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \wedge \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

- Zatem $\bigwedge_{n\geqslant 1} b_n = \sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n} = a_n \geqslant 0.$
- Ponadto o szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ wiemy, że jest rozbieżny.
- **Wniosek:** Na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest rozbieżny.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}$

- $\bigwedge_{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} \sin x < x$ oraz $\bigwedge_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Zatem

$$\bigwedge_{n\geqslant 1} \quad 0 \geqslant a_n = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} = b_n$$

- Ponadto wiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.
- **Wniosek:** Na mocy kryterium porównawczego badany szereg jest zbieżny.

(b) Zbadać zbieżność podanych szeregów liczbowych posługując się **kryterium d'Alemberta**:

Załóżmy, że $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0$ *i istnieje* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Wówczas:*

1) jeśli $\alpha < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*

2) jeśli $\alpha > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny;*

3) jeśli $\alpha = 1$, *to kryterium nie rozstrzyga kwestii zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{3^n - 2^n}$

- Mamy $a_n = \dfrac{n^3}{3^n - 2^n} > 0$ dla $n \geqslant 2$.
- Obliczamy

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{3\cdot 3^n - 2\cdot 2^n} \cdot \frac{3^n - 2^n}{n^3} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{3^n - 2^n}{3\cdot 3^n - 2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\left(3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{1}{3}$$

- **Wniosek:** Ponieważ $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, na mocy kryterium d'Alemberta badany szereg jest zbieżny.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

- Mamy $a_n = \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}} > 0$ dla $n \geqslant 1$.
- Obliczamy

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(n+1)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1}\cdot (n!)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2\cdot 4^n} \underset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\overset{H}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{2\cdot 4^n \ln 4} \underset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\overset{H}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n \ln^2 4} = 0.$$

- **Wniosek:** Ponieważ $\alpha = 0 < 1$, na mocy kryterium d'Alemberta badany szereg jest zbieżny.