MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Martyna Majda**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 4 z listy 2.

Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregu, wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\,n!}{(2n)^n}=0.$

Dowód. Wykorzystamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

(Pamiętajmy jednak, że nie jest to warunek dostateczny zbieżności szeregu:
ze zbieżności $a_n \to 0$ nie wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.)

Na mocy Tw.1, jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\,n!}{(2n)^n}$ jest zbieżny, to granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\,n!}{(2n)^n}$ jest na pewno równa 0.

Zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\,n!}{(2n)^n}$ wykażemy korzystając z kryterium d'Alemberta:

Twierdzenie 2. *(kryterium d'Alemberta)*

Dla $a_n > 0 \;\; \forall n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\begin{cases} <1 \;\Rightarrow\; & \textit{szereg } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ jest zbieżny,}\\ >1 \;\Rightarrow\; & \textit{szereg } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ jest rozbieżny,}\\ =1 \;\Rightarrow\; & \textit{kryt. d'Alemberta nie rozstrzyga kwestii zbieżności szeregu } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n. \end{cases}$$

W przypadku badanego szeregu mamy $a_n = \dfrac{3^n\,n!}{(2n)^n} > 0 \;\; \forall n$ oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(2\,(n+1))^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{(2n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot \cancel{n!}\;\cancel{(n+1)}}{(\cancel{2}(n+1))^n\cdot 2\cancel{(n+1)}}\cdot\frac{(\cancel{2}n)^n}{\cancel{3^n}\;\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{2e} < 1,$$

zatem na mocy kryterium d'Alemberta (Tw. 2.) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\,n!}{(2n)^n}$ jest zbieżny,

a stąd, z Tw. 1, wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\,n!}{(2n)^n}=0.$ $\square$